

Periodico di Matematica

**RIVISTA DI
MATEMATICA ELEMENTARE E SCIENZE ESATTE
DA UN PUNTO DI VISTA SUPERIORE**

Anno XLI Serie V – volume I (1)

Aprile 2026

A cura di

Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA



MATEMATICA – FISICA - INFORMATICA

PERIODICO DI MATEMATICA

**RIVISTA DI
MATEMATICA ELEMENTARE E SCIENZE ESATTE
DA UN PUNTO DI VISTA SUPERIORE**

**Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di**

Ferdinando Casolaro – Franco Eugeni – Luca Nicotra

**Anno XLI - Serie V – Volume I (1)
Aprile 2026**



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanna Della Vecchia
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa

Comitato Scientifico

Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Franco Francia (La Spezia)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Paolo Severino Manca (Pisa)
Raffaele Mascella (Teramo)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Canio Noce (Salerno)
Nicla Palladino (Perugia)
Salvatore Rao (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Ugo Vaccaro (Salerno)
Giovanni Vincenzi (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305

eugenif3@gmail.com.

Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693

ferdinando.casolaro@unina.it

Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Segreteria di redazione:

Giovanna Della Vecchia (Napoli)
giovanna.dellavecchia@gmail.com

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Zona Industriale
Colleranese - 65021 Giulianova
(TE) C.F. 91053660675

Copyright © 2026 Edizioni AFSU -
UniversItalia-Teramo, Roma -
ISSN Online: 2612-6745

® Reg. Versione online n.695/2019
del 19 luglio 2019 e Versione
cartacea n.695/2021 del 3 giugno
2021 Tribunale di Teramo.

Tutti i diritti riservati.

ISBN 978-88-3293-928-6. Gli
scritti apparsi sulla Rivista possono
essere pubblicati altrove purché se
ne dichiari la fonte.

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista quadrimestrale distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Alberto Trotta (Salerno), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

Finito di stampare nel mese di aprile 2026 presso UniversItalia

Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 -

e_mail: info@universitaliasrl.it-www.unipass.it.

INDICE

Paolo Severino Manca	7
<i>Louis Bachelier</i>	
Giuseppe D'Angelo	19
<i>Origine dei moti relativi dei corpi Celesti</i>	
Pietro Velonà	39
<i>Analisi relativistica del selettore di velocità</i>	
Franco Fernicola, Giovanni Forlenza	61
<i>Bisettrice di un angolo e coppie ordinate di rette inverse</i>	
Anna Amirante	79
<i>La polimatia di Parmenide lo fa diventare scienziato?</i>	
<i>Profili biografici degli autori</i>	95



La matematica è l'arido mondo dei numeri, che sono alla base di quella logica degli algoritmi che sta distruggendo la creatività umana. La letteratura è il regno della libertà, della fantasia e di quei sogni che ci aiutano a liberarci dalle ristrettezze della vita di tutti i giorni. Insomma, matematica e letteratura sono agli antipodi l'una dell'altra. Questo è il luogo comune a cui si contrappongono i nuovi "Altri Coriandoli" di Carlo Toffalori, un logico matematico che ha insegnato per molti anni all'Università degli Studi di Camerino.

Louis Bachelier

Paolo Severino Manca*

DOI:10.53159/PdM(V).v1n1.166

Ricevuto 9-02-2026 Accettato 16-02-2026 Pubblicato 30-04-2026



Abstract: *The figure of Louis Bachelier is remembered and his approach to the behaviour of prices on financial markets is framed, which was so anticipatory that it was not understood and appreciated for many decades.*

Keywords: Brownian motion, financial securities, random walk.

Sommario: *Viene ricordata la figura di Louis Bachelier e inquadrata la sua impostazione relativa al comportamento dei prezzi sui mercati finanziari così anticipatoria da non essere compresa e apprezzata per molti decenni.*

Parole chiave: moto browniano, titoli finanziari, passeggiata aleatoria.

*Già Ordinario di Matematica Finanziaria - Università degli Studi di Pisa;
paolo.severino.manca@gmail.com.

1 Un quesito senza risposta

Mi succede l'estate pagaiando sul mio kajak, il Nirvana : invece di ammirare le coste elbane, vengo spesso assorbito da quesiti senza risposte e mi estraneo dal sole e dal mare.

La iella colpisce alla cieca o alcuni se la vanno a cercare?

Meglio essere bravi e sfortunati o ignoranti presuntuosi ma fortunati?

Essere o non essere? Come disse Amleto.

Essere o avere? Come scrisse Erich Fromm.

Ma non intendo rispondere a tali quesiti, né vedo perché dovrei dare una risposta poiché, come sostengo da sempre, "le risposte sono inutili, solo le domande sono utili".

Rivolgo queste domande a personaggi di grandissimo talento a cui sono riconoscente e affezionato e che, pur avendo avuto tutte le qualità per condurre una vita serena, hanno dovuto sopportare un'esistenza tribolata e a volte tragica. Penso, tra i matematici, al poco più che adolescente Evariste Galois (1811-1832), al giovane Niels Abel (1802-1829), all'immenso Kurt Godel (1906-1978), a John Nash (1928-2015), e , non ultimo, a Louis Bachelier (1870-1946).



Fig. 1 Louis Bachelier (1870-1946)

Louis Bachelier nacque a Le Havre (Francia) nel 1870 da una famiglia di commercianti. Quando aveva 19 anni, per la morte di entrambi i genitori, fu costretto ad abbandonare gli studi per poter mantenere i due fratelli minori. Solo all'età di 22 anni poté riprendere gli studi alla Sorbonne.

Il 29 marzo 1900, all'età di 30 anni, presentò la tesi di dottorato in matematica (Bachelier, 1900) dal titolo : *Theorie de la speculation* (La teoria della speculazione).¹

Aveva trovato qualcosa di straordinario ma all'epoca nessuno ne colse la portata anche se l'articolo venne giudicato interessante e pubblicato sulla prestigiosa rivista dell'*Ecole Normale Supérieure*.

Bachelier continuò il suo lavoro e pubblicò anche altri importanti articoli sul nascente calcolo delle probabilità ma non fece carriera.

Nel 1918, finita la prima guerra mondiale, all'età di 48 anni riuscì finalmente ad ottenere un posto di supplente all'Università di Besançon.

Nel 1922 si sposò ma rimase subito vedovo.

Nel 1926, quando aveva 56 anni, il Consiglio di facoltà di Scienze di Digione non lo nominò di ruolo a favore di un altro candidato col pretesto di aver rilevato un errore su un suo lavoro. Bachelier al riguardo ebbe a scrivere:

Per una serie incredibile di circostanze mi sono trovato all'età di 56 anni nella situazione ancor peggiore degli ultimi sei anni ... La mia carriera è stata bloccata in modo in modo ingiusto e deplorabile.

Nel 1927 all'età di 57 anni gli venne finalmente offerta la cattedra del corso "Calcolo differenziale e integrale" a Besançon.

Solo verso il 1937, data in cui lasciò l'insegnamento per la pensione, i suoi lavori cominciarono ad essere riconosciuti e fu insignito dell'*Ordre national de la Légion d'honneur*.

¹La tesi fu giudicata "*mention honorable*", anziché "*mention très honorable*", giudizio quest'ultimo indispensabile per poter sperare di ottenere un lavoro all'interno della comunità accademica.

Morì nel 1946 a Saint-Servant-sur-Mer.

A questo punto mi chiedo: non sarebbe stato meglio, per Louis, che avesse scritto delle fesserie e che la sua generazione le avesse ritenute sublimi e che per tali fesserie avesse preso il Nobel e poi, a morte avvenuta, si fosse scoperto che erano realmente fesserie?

Purtroppo le cose andarono diversamente e Louis fu doppiamente sfortunato (bi-sfortunato) non solo perché iellato ma anche perché si è occupato di una materia importante ma ostica per cui, anche oggi, solo pochissimi riescono a capire cosa abbia scritto.

Lo sforzo, spero encomiabile, che farò per cercare di delineare il suo contributo certamente lo commuoverà.

Ho detto encomiabile perché l'argomento è particolarmente sofisticato e ogni banalizzazione si presta a critiche e d'altra parte viene tuttora straziato da presuntuosi incompetenti che non provano orrore di se stessi.

La mia presentazione è volutamente breve, insiste sulle idee ed evita disinvoltamente approfondimenti tecnici delicati ma importanti.

Preciso inoltre per chi volesse consultare il testo di Bachelier , reperibile tuttora sul web, che ovviamente il linguaggio matematico utilizzato risulta piuttosto dissimile da quello attuale. Nel 1900 il calcolo delle probabilità era ai primordi : basti pensare che una definizione rigorosa di probabilità risale al 1931 con Bruno de Finetti e al 1933 con Andrej Kolmogoroff .

2 1827 : arriva Robert Brown

Robert Brown , (1773-1858), botanico scozzese, nel 1827, mentre esaminava al microscopio alcuni granelli di polline in sospensione nell'acqua, vide e descrisse il moto frenetico e totalmente caotico di piccolissime particelle all'interno dei vacuoli nei granelli.

Brown non riuscì a spiegare il fenomeno.

Poiché le molecole d'acqua si muovono casualmente in tutte le direzioni in maniera del tutto casuale altrettanto fanno le sub particelle di polline : questa spiegazione, per noi abbastanza ovvia, non

poteva essere compresa da Brown per il semplice motivo che egli non era consapevole che l'acqua fosse fatta di molecole.

Comunque, sebbene Brown non abbia mai fornito una spiegazione sulla natura di tale moto e Jan Ingenhousz l'avesse già descritto usando particelle di carbone in pubblicazioni tedesche e francesi del 1784 e 1785, il fenomeno è rimasto tuttora noto come moto browniano.²

3 1905: arriva Einstein

Il 1905 fu l'anno "mirabilis" nella vita di Albert Einstein e nella storia della fisica. Nel giro di sette mesi pubblicò sei lavori: un articolo che spiegava l'effetto fotoelettrico che gli valse il premio Nobel per la fisica nel 1921 e avrebbe contribuito allo sviluppo della meccanica quantistica, due memorie sulla relatività ristretta con la formula $e = mc^2$, la tesi di dottorato *Nuova determinazione delle dimensioni molecolari*, diventata lo scritto più citato nella letteratura scientifica degli anni Settanta,³ due articoli sul moto browniano che dettero tra l'altro un fondamento indispensabile alle teorie dell'atomo.

Nei due articoli sul moto browniano Einstein fornì una descrizione quantitativa di tale moto che spiegò attribuendo la causa del movimento irregolare delle subparticelle allo scontro ripetuto con le molecole d'acqua. Il moto veniva modellizzato come una passeggiata casuale e aprì le porte allo studio delle cosiddette *random walk*⁴

²Cfr Wikipedia

³La teoria di Einstein si sviluppa a partire dalla sua tesi di dottorato, discussa il 30 Aprile 1905, in cui presenta un metodo per la determinazione della dimensione molecolari e del numero di Avogadro dal coefficiente di viscosità di soluzioni zuccherine. Undici giorni dopo la rivista *Annalen der Physik* pubblica un articolo intitolato: *Die von der Molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*, in cui Einstein estende i ragionamenti fatti per le molecole di zucchero al caso di particelle microscopiche.

⁴Random walk : il termine fu introdotto per la prima volta da Karl Pearson nel 1905

formalizzate compiutamente da Norbert Wiener pochi anni dopo nel 1923.

4 1900 : arriva anche Louis Bachelier

Einstein non sapeva che un modello matematico simile era già stato impostato cinque anni prima da un giovane matematico e dottorando francese di nome Louis Bachelier con riferimento non alle sub particelle di polline ma ai movimenti altrettanto caotici dei prezzi alla Borsa di Parigi.⁵

Per scrivere la sua tesi, Bachelier si reca alla Borsa di Parigi, registra nel suo taccuino i prezzi delle azioni, e fa una scoperta sensazionale. Per dirla con le parole della sua tesi:

*La détermination de ces mouvements se subordonne à un nombre infini de facteurs : il est des lors impossible d'en espérer la prévision mathématique..... Mais il est possible d'étudier mathématiquement l'état statique du marché à un instant donné c'est-à-dire d'établir la loi de probabilité des variations de cours qu'admet à cet instant le marché. Si le marché, en effet, ne prévoit pas les mouvements, il les considère comme étant plus ou moins probables, et cette probabilité est possible s'évaluer mathématiquement La recherche d'une formule qui l'exprime ne paraît pas jusqu'à ce jour avoir été publiée; elle sera l'objet de ce travail.*⁶

⁵Naturalmente i risultati di Einstein hanno ben altra valenza.

⁶La determinazione di tali movimenti è subordinata a un numero infinito di fattori ed è impossibile sperare in una previsione matematica Ma è possibile studiare matematicamente lo stato del mercato a un dato istante stabilire cioè ad un dato istante la legge di probabilità delle variazioni dei prezzi. Se infatti il mercato non prevede i movimenti li considera come più o meno probabili e questa probabilità si può valutare matematicamente. La ricerca di una formula che la esprime non sembra ad oggi essere stata pubblicata; sarà l'oggetto di questo lavoro.

La formula è: *la loi de Gauss déjà célèbre dans le Calcul des probabilités* (pag. 37)(Bachelier, 1900). Bachelier ha anche intuito che in un mercato competitivo le fluttuazione dei prezzi sono indipendenti dal prezzo corrente che è il miglior stimatore delle attese sui prezzi futuri. Bachelier ha anche sviluppato una formula matematica per la valutazione delle opzioni basata sulla probabilità che il sottostante raggiunga un dato livello di prezzo.

5 Trascorrono “solo” 64 anni : arriva Paul Cootner.

Di fatto il lavoro di Bachelier rimase nell’ombra fino al 1964, quando il professor Paul Cootner del MIT pubblicò una ponderosa raccolta di 500 pagine di studi sul movimento dei prezzi azionari dal titolo: *The Random Character of Stock Market Prices*. In quest’opera, tradotta per la prima volta in inglese, fu pubblicato e divenne noto il contributo del 1900 di Louis Bachelier e Paul Cootner ebbe al riguardo le seguenti parole:

Il suo lavoro è così eccezionale da poter affermare che lo studio dei prezzi speculativi ha il suo momento di massima gloria al momento della stesura di quest’opera.

Dunque Bachelier aveva intuito le caratteristiche delle traiettorie che descrivono l’evoluzione temporale di un titolo finanziario contrattato in borsa : sostanzialmente il moto browniano che resta alla base di tutta la matematica della finanza moderna, matematica profondamente incompresa per l’utilizzo di concetti molto sofisticati e astratti quali la teoria della misura, gli integrali stocastici e le equazioni differenziali stocastiche.⁷

Al riguardo devo comunque aggiungere che l’esplosione della finanza matematica parte dal 1973 col celebre articolo di Fischer Black e Myron Scholes (Black e Scholes, 1973) e autonomamente

⁷Sull’argomento ho scritto un libro illeggibile (Manca, 2005)

di Robert Merton (Merton, 1973), che sfruttano un'idea innovativa semplicissima e genialissima: quella dell'assenza di arbitraggi.⁸

6 Ma cos'è mai un moto browniano

Oggi l'evoluzione dei prezzi dei titoli finanziari viene formalizzata come un processo stocastico di Ito che viene espresso dalla scrittura simbolica:

$$dX_t = \mu(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dW_t \quad (1)$$

Si tratta di un processo stocastico continuo composto da una parte deterministica (deriva o *drift*): $\mu(X_t, t) dt$, e una parte casuale (diffusione): $\sigma(X_t, t) dW_t$.

A livello intuitivo si tratta di sovrapporre ad una curva deterministica un tracciato totalmente caotico come quello di un sismografo.

La parte caotica è espressa da dW , che in prima approssimazione si può intendere come $W(t + dt) - W(t)$, dove $W(t)$ indica un moto browniano o processo di Wiener, cioè un processo stocastico (unidimensionale) gaussiano, in tempo continuo, con incrementi stazionari e indipendenti, con distribuzione normale standard. In termini essenziali per un moto browniano (standard) risulta:

$$W(t) = \sqrt{t}Z, W(t) - W(s) = \sqrt{t-s}Z$$

essendo Z una variabile gaussiana standardizzata $Z \sim N(0, 1)$. Banale direi (!!?)⁹ purché si sappia cos'è una gaussiana.

⁸Le idee veramente genialissime sono infatti semplicissime, solo che nessuno prima riusciva a vederle.

⁹Nei testi di matematica quando si incontrano questioni veramente toste è buona abitudine utilizzare espressioni come: "per cui si ha ovviamente", "è immediato verificare che", "da cui con semplici passaggi si trae", o, per chi sa osare: "banale direi".

7 Ma cos'è mai una gaussiana

La campana di Gauss o Gaussiana non è una campana e neppure una leggiadra fanciulla nata a Gauss, è una distribuzione continua di probabilità, detta anche distribuzione normale, che prende il nome dall'immenso matematico tedesco Carl Friedrich Gauss che l'ha introdotta nel 1809.

La forma generale della funzione che la descrive è :

$$f(x) = ae^{-bx^2} \quad (2)$$

con a e b positivi, che assume valore massimo per $x = 0$ e che decresce simmetricamente tendendo a zero al crescere di x e il cui grafico dunque somiglia a una campana.

La notazione Z indica la gaussiana cosiddetta normale caratterizzata dalla densità di probabilità:

$$z(x) = \sqrt{2\pi}^{-1} e^{\left(\frac{-x^2}{2}\right)} \quad (3)$$

Il fattore $\sqrt{2\pi}$ garantisce Z abbia valor medio zero e varianza 1, col che si usa scrivere : $Z \sim N(0, 1)$, Questa dannata gaussiana in campo scientifico compare ovunque e, matematicamente parlando, mostra una serie incredibile di proprietà tra le quali quella che la lega alla distribuzione binomiale, alle passeggiate aleatorie, e che spiega come mai i prezzi dei titoli finanziari variano un po' come le sub particelle di polline. Banale direi purché si sappia cos'è una passeggiata aleatoria,

8 Ma cos'è mai una passeggiata aleatoria

Una passeggiata aleatoria monodimensionale¹⁰ è quella che percorre un buontempone nullafacente su un marciapiede rettilineo e

¹⁰Il caso pluridimensionale prevede che la passeggiata invece che su una retta si svolga in R^n .

che a intervalli temporali eguali, (ogni tre secondi o se ha bevuto ogni quarto d'ora), lancia una moneta e se esce testa avanza di un metro e se esce croce retrocede di un metro.¹¹

Se notiamo con 0 il punto di partenza, se p è la probabilità che esca testa e $q = 1 - p$ la probabilità che esca croce, dopo n intervalli di tempo il nostro amico si trova certamente in un tratto di marciapiede di lunghezza $2n$: da $-n$ a n . Si trova al punto n se è uscita per n volte testa, e ciò avviene con probabilità p^n , si trova al punto $-n$ se è uscita per n volte croce, e ciò avviene con probabilità q^n .

Se testa è uscita 1 volta sola, e dunque croce è uscita $n-1$ volte, il buontempone si trova al punto: $1 - (n-1) = 2 - n$, con probabilità: $C_{n,1} = \binom{n}{1} p q^{n-1} = n p \cdot q^{n-1}$.

In generale, se la faccia testa è uscita r volte e dunque croce è uscita $n-r$ volte, il buontempone si trova al punto: $r - (n-r) = 2r - n$, con probabilità $C_{n,r} = \binom{n}{r} p^r \cdot q^{n-r}$.

In definitiva il moto del buontempone risulta descritto da una variabile casuale che assume i valori $s = -n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, n$ ciascuno con probabilità $C_{n,r} = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$ essendo $r = |s|$.¹²

Con ciò abbiamo ritrovato la famosa distribuzione binomiale che per $p = q = 1/2$ risulta simmetrica rispetto all'origine e che assume valori decrescenti via via che ci si allontana dall'origine fino quasi ad annullarsi.

La distribuzione binomiale è la distribuzione associata alla variabile casuale $S_n = X_1 + \dots + X_n$, dove X_h è la variabile casuale che può assumere solo due valori -1 e $+1$ con probabilità $1/2$ e che rappresenta lo spostamento del buontempone al tempo h .

Se sostituiamo il buontempone con un robot che opera ogni centesimo di secondo, ovvero se filmiamo il buontempone e proiettiamo il filmato a grande velocità, vedremo un qualcosa che schizza freneticamente e caoticamente intorno all'origine.

E qui arriva Gauss e la gaussiana perché quando n diventa molto grande la distribuzione binomiale approssima sempre meglio la

¹¹Esistono anche i buontemponi temerari che camminano con la stessa regola ma su una fune sospesa a un centinaio di metri.

¹²I punti equidistanti dell'origine hanno la stessa probabilità.

gaussiana.¹³

Senza richiamare ulteriormente la matematica sottostante, sintetizzo nel ricordare che la legge di Gauss fornisce la densità di probabilità che traduce in modo soddisfacente il comportamento di fenomeni che hanno origine dalla interazione di un numero grandissimo di piccolissime concause non prevedibili né controllabili. Tipico anche nel caso delle misurazione di grandezze fisiche : se dobbiamo effettuare una misura quanto più precisa possibile, e per sicurezza ripetiamo la misura stessa più volte, l'esperienza mostra che le misure trovate si distribuiscono con ottima approssimazione come una curva gaussiana.¹⁴

9 Bibliografia

1. Bachelier Louis (1900). Theorie de la speculation. In: «*Annales scientifiques de l'É.N.S.*» 3e série, tome 17.
2. Black, F. e Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: «*Journal of Political Economy*» 81 (3), 637-654.
3. Manca Paolo (2005). *Principi di valutazione dei titoli derivati*. Giappichelli.
4. Merton, R. (1973). Theory of Rational Option Pricing. In: «*Bell Journal of Economics and Management Science*» 4 (1), 141-183.

¹³Si tratta di un sottocaso del teorema del limite centrale : una famiglia di teoremi che hanno in comune l'affermazione che la somma (normalizzata) di un grande numero di variabili casuali converge ad una variabile casuale normale.

¹⁴Escludendo dunque gli errori sistematici



Origine dei moti relativi dei corpi celesti

Giuseppe D' Angelo*

DOI:10.53159/PdM(V).v1n1.167

Ricevuto 21-03-2026 Accettato 30-03-2026 Pubblicato 30-04-2026



Abstract: *This work investigates the relationship between Newton's law of universal gravitation, Kepler's third law, and the orbital velocity of celestial bodies, with particular emphasis on the origin of angular momentum in astrophysical systems. Starting from the equivalence between gravitational and centripetal forces in orbital motion, we show that the dependence of orbital velocity on radial distance is a direct consequence of Newtonian gravitation, thereby clarifying the formal connection between orbital dynamics and Kepler's third law. The origin of the tangential component required for orbital motion is then examined. Since gravity is a central force, it cannot generate angular momentum in the absence of non-radial initial conditions. Within general relativity, spacetime curvature determines the evolution of initial conditions but does not create angular momentum from zero. The discussion is extended to cosmology, addressing the role of the Big Bang and primordial density fluctuations*

*Docente di materie scientifiche presso il Liceo Scientifico "Leonardo" di Giarre - CT; sitdang010762@gmail.com

in the generation of local angular momentum. In agreement with tidal torque theory, we propose that density anisotropies during the gravitational collapse of protostellar clouds can produce net torques capable of initiating rotation and protoplanetary disk formation, without necessarily invoking collisions between pre-rotating nebulae. We conclude that rotational and orbital motions of celestial bodies can be interpreted as emergent phenomena arising from gravitational anisotropies and angular momentum conservation, while the ultimate origin of cosmic angular momentum remains an open question within modern cosmology.

Keywords: Gravitational force; Kepler; orbital velocity;

Sommario: *Il presente lavoro analizza la correlazione tra legge di gravitazione universale, terza legge di Keplero e velocità orbitale dei corpi celesti, con particolare attenzione all'origine del momento angolare nei sistemi astronomici. Partendo dall'equivalenza tra forza gravitazionale e forza centripeta nel moto orbitale, si evidenzia come la dipendenza della velocità orbitale dalla distanza dal corpo centrale costituisca una diretta conseguenza della legge newtoniana della gravitazione, chiarendo il legame formale tra dinamica orbitale e terza legge di Keplero. Viene quindi affrontata la questione dell'origine della componente tangenziale necessaria all'esistenza delle orbite, sottolineando come la gravità, in quanto forza centrale, non possa generare momento angolare in assenza di condizioni iniziali non radiali. In ambito relativistico, la curvatura dello spazio-tempo determina l'evoluzione delle condizioni iniziali ma non crea momento angolare dal nulla. L'analisi si estende alla cosmologia, discutendo il ruolo del Big Bang e delle fluttuazioni primordiali di densità nella genesi del momento angolare locale. In accordo con la tidal torque theory, si propone che asimmetrie densimetriche durante il collasso gravitazionale di nubi protostellari possano generare momenti torcenti risultanti capaci di innescare rotazione e formazione di dischi protoplanetari, senza richiedere necessariamente urti tra nebulose pre-rotanti. Si conclude che il moto rotatorio e orbitale dei corpi celesti può essere interpretato come emergente da anisotropie gravitazionali e dalla conservazione del momento angolare, mentre l'origine ultima del momento angolare cosmico rimane una questione aperta nel quadro della cosmologia moderna.*

Parole chiave: Forza di gravità; Keplero; velocità orbitale;

1 Introduzione

Bene o male tutti ricordiamo l'esempio scolastico utilizzato per farci comprendere il concetto di forza centrifuga e centripeta. Si tratta del secchiello pieno d'acqua il cui manico è legato ad un filo tramite il quale viene fatto roteare attorno a noi, senza che ciò causi la fuoriuscita di acqua dal suo interno. Il secchiello così descrive un moto circolare e la sua resistenza d'inerzia lo tira in verso opposto rispetto alla tensione operata dalla mano, nella stessa direzione del filo. All'inerzia è dovuta la forza centrifuga; la tensione opposta esercitata dalla mano che tiene il filo rappresenta invece la forza centripeta. Il secchiello si muove di moto circolare grazie però ad un momento torcente applicato tramite il nostro braccio che si muove insieme al cestello [1]

Nota 1.1. *Il momento torcente (o momento di una forza) è una grandezza fisica vettoriale che misura l'efficacia di una forza nel produrre una rotazione attorno a un punto o un asse, ed è il corrispondente rotazionale della forza lineare. Si calcola come prodotto vettoriale tra il vettore posizione (dal fulcro al punto di applicazione della forza) e il vettore forza, oppure come prodotto di forza per il suo braccio (distanza perpendicolare dal fulcro alla retta d'azione della forza). La sua unità di misura nel Sistema Internazionale è il Newton per metro ($N \cdot m$) e determina l'accelerazione angolare di un corpo.*

. Questo momento torcente conferisce al secchiello una determinata velocità tangenziale. L'esempio del cestello ci permette di fare un parallelismo con il moto di rivoluzione dei pianeti [2]. Anche in questo caso abbiamo una forza centrifuga che tenderebbe a far allontanare il pianeta dal Sole. Ciò però non avviene perché il Sole con la sua forza attrattiva gravitazionale (rappresentante la forza centripeta) lo impedisce [3]. Per far muovere i pianeti lungo la loro orbita necessita comunque una componente tangenziale. L'origine

della componente tangenziale potrebbe lasciare perplessi. Spesso si fa riferimento ad una propria velocità originaria del pianeta di non definita origine che si combinerebbe con la componente gravitazionale raggiungendo un equilibrio specifico ad una determinata distanza orbitale. Questa spiegazione lascia qualche grado di libertà interpretativa per via della non chiara origine della velocità tangenziale posseduta dai pianeti. Nei prossimi paragrafi si vuole evidenziare la forte correlazione tra la terza legge di Keplero e la legge di gravitazione universale e da cosa possa essere generato il momento torcente che permette il moto di rivoluzione dei corpi astronomici [4].

2 Terza legge di Keplero e velocità orbitale dei pianeti

La terza legge di Keplero

Nota 2.1. *Giovanni Keplero (1571-1630) è stato un matematico e astronomo tedesco, figura chiave della rivoluzione scientifica, noto soprattutto per aver scoperto le tre leggi del moto planetario (le orbite sono ellittiche, il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali, e c'è una relazione matematica tra periodo di rivoluzione e distanza dal Sole), che hanno rivoluzionato la comprensione del sistema solare eliocentrico, basandosi sui dati di Tycho Brahe (Giovanni Keplero).*

afferma che “il quadrato dei tempi di rivoluzione è proporzionale al cubo della distanza del pianeta dal sole” [5]. La legge viene resa dalla seguente equazione:

$$T^2 = kd^3 \quad (1)$$

Il senso pratico di questa legge è che i pianeti più lontani hanno una velocità orbitale minore di quelli più vicini (vedi tabella di Fig. 1). Come si può vedere dai dati riportati nella seguente tabella che Mercurio ha una velocità orbitale di circa 48 Km/s mentre Nettuno di appena 5,4. Nella seguente tabella viene anche riportato il rapporto costante tra T^2 e d^3 .

Calcolo della velocità orbitale e della costante di Keplero.

Keplero si accorse che i tempi di rivoluzione (T) corrispondevano al rapporto T^2/d^3

PIANETA	MASSA (Kg)	T (s)	T^2	K	d^3	d (m)	CIRCONFERENZA ORBITALE (m)	VELOCITA' (m/s)
MERCURIO	3.30×10^{23}	7603200	5.78×10^{13}	2.98×10^{19}	1.94×10^{32}	5.791×10^{10}	3.64×10^{11}	47855.24
VENERE	4.87×10^{24}	19440000	3.78×10^{14}	2.98×10^{19}	1.27×10^{33}	1.082×10^{11}	6.8×10^{11}	34974.14
TERRA	5.97×10^{24}	31557600	9.96×10^{14}	2.97×10^{19}	3.35×10^{33}	1.496×10^{11}	9.4×10^{11}	29785.68
MARTE	6.42×10^{23}	59328288	3.52×10^{15}	2.97×10^{19}	1.18×10^{34}	2.279×10^{11}	1.43×10^{12}	24140.5
GIOVE	1.90×10^{27}	374273136	1.4×10^{17}	2.97×10^{19}	4.72×10^{35}	7.784×10^{11}	4.89×10^{12}	13067.55
SATURNO	5.69×10^{26}	929371320	8.64×10^{17}	2.95×10^{19}	2.92×10^{36}	1.43×10^{12}	8.98×10^{12}	9667.777
URANO	8.68×10^{25}	2653047432	7.04×10^{18}	2.98×10^{19}	2.36×10^{37}	2.87×10^{12}	1.8×10^{13}	6796.992
NETTUNO	1.02×10^{26}	5203848240	2.71×10^{19}	2.97×10^{19}	9.11×10^{37}	4.5×10^{12}	2.83×10^{13}	5433.351

Considerando il fatto che la forza gravitazionale corrisponde alla forza centripeta, che impedisce ai corpi celesti di allontanarsi dal corpo attrahente, la velocità orbitale si ricava facilmente eguagliando le due forze.

Forza di gravità:

$$F = G_0 \frac{mM}{d^2} \quad (2)$$

Forza centripeta (in modulo, con velocità angolare):

$$F_c = m \frac{v^2}{d} \quad (3)$$

Quindi:

$$m \frac{v^2}{d} = G_0 \frac{mM}{d^2} \quad (4)$$

Con G_0 = costante di gravitazione universale, m = massa del pianeta (o di qualsiasi corpo minore rispetto a un corpo di massa maggiore) e M = massa del Sole.

Semplificando avremo:

$$v^2 = \frac{G_0 M}{d} \quad (5)$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (6)$$

La seguente tabella mostra i valori della velocità orbitale dei pianeti calcolata sia con il rapporto diretto S/T che con l'equazione (6)

Calcolo della velocità orbitale secondo l'equazione (6)

PIANETI	MASSA (kg)	T (s)	d (m)	CIRCONFERENZA ORBITALE (m)	VELOCITA' (m/s)	MASSA SOLE	$G M_0 (m^3 kg^{-1} s^{-2})$	VELOCITA' EQ. (m/s)
MERCURIO	3.33×10^{23}	7603200	5.7909×10^{10}	3.64×10^{11}	47855.24	1.99×10^{30}	6.67×10^{-11}	4.79×10^4
VENERE	4.87×10^{24}	19440000	1.0821×10^{11}	6.8×10^{11}	34974.14	1.99×10^{30}	6.67×10^{-11}	35015.44
TERRA	5.97×10^{24}	31557600	1.496×10^{11}	9.4×10^{11}	29785.68	1.99×10^{30}	6.67×10^{-11}	29780.05
MARTE	6.42×10^{23}	59328288	2.2794×10^{11}	1.43×10^{12}	24140.5	1.99×10^{30}	6.67×10^{-11}	24125.55
GIOVE	1.90×10^{27}	3.74×10^8	7.784×10^{11}	4.89×10^{12}	13067.55	1.99×10^{30}	6.67×10^{-11}	13055.39
SATURNO	5.69×10^{26}	9.29×10^8	1.43×10^{12}	8.98×10^{12}	9067.78	1.99×10^{30}	6.67×10^{-11}	9632.15
URANO	8.68×10^{25}	2.65×10^9	2.87×10^{12}	1.8×10^{13}	6796.99	1.99×10^{30}	6.67×10^{-11}	6799.08
NETTUNO	1.02×10^{26}	5.2×10^9	4.5×10^{12}	2.83×10^{13}	5433.35	1.99×10^{30}	6.67×10^{-11}	5429.81

L'equazione (3) propone, peraltro, una proporzionalità diretta tra forza centripeta e velocità tangenziale (che nel caso di un sistema planetario è quella con la quale si muovono i pianeti attorno alla propria stella), ma non chiarisce l'origine della velocità tangenziale. Di fatto, però, questa equazione dichiara una correlazione tra le due grandezze. Nel moto dei pianeti attorno al Sole la forza centripeta corrisponde alla forza di gravità, quindi, è lecito affermare che la (3) potrebbe essere valida anche per correlare la forza di gravità alla velocità orbitale dei pianeti. Da questo punto di vista ciò diventa una spiegazione di un dato di fatto oggettivo e cioè che la velocità orbitale diminuisce con l'aumentare della distanza del pianeta dal Sole a causa della correlata diminuzione della forza di gravità. Poiché la terza legge di Keplero descrive esattamente una simile correlazione tra distanza e velocità orbitale ne consegue che la terza legge di Keplero e quella di gravitazione universale debbano, necessariamente, essere in qualche modo correlate. Dalla (1) si ricava infatti che:

$$T = \sqrt{Kd^3} \quad (7)$$

Dividendo adesso ambo i membri della (7) per $2\pi d$ otteniamo una correlazione tra velocità orbitale e costante K.

$$\frac{T}{2\pi d} = \frac{\sqrt{Kd^3}}{2\pi d} = \frac{1}{v} \quad (8)$$

Da cui:

$$v = \frac{2\pi d}{\sqrt{Kd^3}} \quad (9)$$

Uguagliando adesso la (9) con la (6) otteniamo:

$$\frac{2\pi d}{\sqrt{Kd^3}} = \sqrt{\frac{G_0 M}{d}} \quad (10)$$

Da cui si ricava:

$$K = \frac{4\pi^2}{G_0 M} \quad (11)$$

Inserendo nella (11) i corrispondenti valori della massa del Sole e della costante di gravitazione universale troviamo, per l'appunto, il valore della costante kepleriana K , pari a $2,98 \times 10^{-19}$. La (11) dimostra, in modo semplice, la stretta correlazione esistente tra terza legge di Keplero e la legge di Newton. Se quindi la velocità orbitale dei pianeti dipende dalla forza di gravità esercitata dal Sole è possibile che anche il momento torcente, che permette il moto rotatorio e quindi la velocità stessa con la quale essi si muovono, possa essere generato contestualmente alla forza di gravità?

Nota 2.2. *Il momento torcente ($\vec{\tau}$) è la causa del cambiamento del moto rotatorio (come la forza per il moto traslatorio), misurando l'effetto di una forza nel far ruotare un oggetto ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$), mentre il momento angolare ($\vec{L}$) è una grandezza di stato che descrive la quantità di moto rotatorio di un corpo, analogo alla quantità di moto lineare, e si conserva se il momento torcente totale è nullo.*

Per una particella:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$$

(prodotto vettoriale tra posizione e quantità di moto).

Per un corpo rigido:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

(prodotto del momento d'inerzia I e velocità angolare $\vec{\omega}$).

Il momento torcente è la derivata temporale del momento angolare:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Questo significa che il momento torcente è la grandezza che fa cambiare il momento angolare nel tempo: il momento torcente “spinge” a cambiare il momento angolare.

È possibile che il loro movimento non abbia un'origine remota indipendente, ma nasca in un contesto gravitazionale? Insomma, è possibile affermare che motore primo di tutti i movimenti dei corpi celesti è sostanzialmente la gravità? Secondo la relatività generale di Albert Einstein [7][8] :

- Il pianeta curva lo spaziotempo
- Il corpo libero segue una geodetica

Ma attenzione, esistono molte geodetiche possibili nello stesso campo gravitazionale:

- Se la velocità iniziale è nulla $\rightarrow$ geodetica radiale
- Se esiste componente tangenziale $\rightarrow$ geodetica orbitale
- Se la velocità è molto alta $\rightarrow$ traiettoria aperta (iperbolica)

La curvatura non “costringe” automaticamente a orbitare. Determina solo come evolvono le condizioni iniziali. Quindi immaginando un corpo immerso in un campo gravitazionale di un pianeta

(o di una stella, o situazioni simili) inizialmente fermo rispetto al sistema di riferimento inerziale del pianeta, se questo corpo diventasse all'improvviso libero di muoversi esso cadrebbe giù con moto radiale fino ad impattare sulla superficie del pianeta. Questo perché nel quadro della meccanica newtoniana se un corpo di massa (m) è inizialmente:

- fermo rispetto al pianeta
- a distanza (r)
- con velocità tangenziale nulla

allora la forza gravitazionale risulta definita dalla (2) ed è diretta lungo la congiungente dei centri. Se non esiste alcuna componente perpendicolare alla forza gravitazionale allora non esiste accelerazione tangenziale e non nasce alcun momento angolare. L'orbita esiste solo se il momento angolare (L) è diverso da zero:

$$L = mrv_{\perp}$$

Se $v_{\perp} = 0$ allora:

$$L = 0$$

e il moto resta radiale per conservazione del momento angolare. La gravità (classica o relativistica) non crea momento angolare dal nulla. L'orbita non è la "traiettoria obbligata" in un campo gravitazionale. È la traiettoria obbligata dato un certo momento angolare iniziale. Tuttavia è lecito chiedersi: può essere che l'origine del moto relativo dei vari corpi celesti nell'universo sia stato inizialmente causato dal Big Bang? [9][10]

Il Big Bang gioca un ruolo fondamentale nel perché qualcosa si muove nell'universo, ma non è un "motore" che spinge corpi singoli a orbitare l'uno attorno all'altro nel senso meccanico classico [11][12][13]. La situazione è più sottile e bisogna distinguere espansione cosmica, momento angolare primordiale e moti locali come orbite e rotazioni.

La teoria del Big Bang afferma che l'universo, circa 13,8 miliardi di anni fa, era in uno stato estremamente denso e caldo e da allora

si è espanso continuativamente. Questa espansione dello spazio è osservata attraverso lo spostamento verso il rosso delle galassie lontane e la radiazione cosmica di fondo. In questo senso il Big Bang è l'origine stessa dell'universo dinamico: prima non c'è una "quiete universale", ma uno stato in cui lo spazio stesso evolve e cresce con il tempo. È importante capire che:

- Il Big Bang dà condizioni iniziali con densità e temperatura elevatissime
- Non impartisce un "impulso" diretto a ogni singolo oggetto
- La conservazione dei momenti e delle quantità di moto resta valida dall'inizio alla fine

Quindi il Big Bang non "spinge" i pianeti a muoversi nello stesso senso in cui una forza meccanica li accelererebbe. Piuttosto:

- lo spazio si espande globalmente,
- ogni punto dell'universo è in moto relativo rispetto agli altri,
- e la conservazione del momento angolare influenza come si formano le strutture.

In altre parole, tutte le particelle avevano movimento sin dagli istanti primordiali, e quel movimento non si è "smarrito" perché le leggi di conservazione (energia, quantità di moto, momento angolare) lo mantengono. Il Big Bang non genera direttamente momento angolare locale (cioè rotazioni o orbite specifiche per stelle, pianeti, galassie) ma fluttuazioni primordiali di densità nell'universo primordiale medesimo, piccole variazioni casuali nella distribuzione della materia, che possono dare luogo a:

- Momento angolare locale quando regioni di materia collassano e ruotano,

- Dischi protoplanetari e orbite planetarie durante la formazione stellare [14][15],
- Rotazioni di galassie e altri oggetti su ampia scala

Questo è ciò che accade nei modelli standard di formazione stellare: una nube interstellare in lenta rotazione collassa sotto la propria gravità, e per conservazione del momento angolare la rotazione aumenta e si forma un disco rotante che darà origine a sistemi planetari. Anche se la teoria standard spiega come si conserva il momento angolare, l'origine precisa del momento angolare cosmico è ancora un campo attivo di ricerca [16][17]. Alcuni modelli teorici considerano persino l'idea di una rotazione primordiale dell'universo o strutture di spin nella gravitazione, ma queste non sono confermate dalla cosmologia osservativa dominante e restano ipotesi speculative. La maggior parte dei cosmologi assume - per la coerenza con le osservazioni dell'Universo su larga scala - che il momento angolare totale dell'universo sia nullo e che le rotazioni locali emergano dalle condizioni iniziali e dalle fluttuazioni di densità. Ma se le fluttuazioni di densità nell'universo primordiale, cioè quelle piccole variazioni casuali nella distribuzione della materia, possono dare luogo a momento angolare locale quando regioni di materia collassano e ruotano ciò significa che il moto di rotazione come tale e in qualsiasi contesto ambientale spaziale può essere ritenuto una conseguenza della risultante di tutte le forze gravitazionali locali? Una differenza di densità esistente anche all'interno delle nubi primordiali che danno origine alle stelle potrebbe, dunque, innescare in esse un momento torcente in grado di generare un moto di rotazione?

3 Moto di rotazione dei pianeti

Perché i pianeti ruotano attorno ad un asse? Si può rispondere a questa domanda secondo l'interpretazione scientifica ufficiale (Confronta con: [link INAF](#)).

Considerando che già la nube primordiale che ha costituito il Sistema Solare possedeva un proprio moto di rotazione dovuto ad incontri o scontri con altre nubi e che, in seguito alla contrazione

dovuta alla forza gravitazionale, ha iniziato a ruotare sempre più velocemente per il principio di conservazione della quantità di moto. Ed ancora affermando che: a causa della forza centrifuga dovuta alla rotazione, la materia non è caduta tutta verso il centro dove si andava formando il Sole, ma ha preso la forma di un disco appiattito; quest'ultimo si è frammentato in parti più piccole, ciascuna delle quali ha iniziato a collassare e a ruotare su sé stessa indipendentemente, prendendo con sé parte del momento angolare iniziale complessivo. Lontano dal Sole, quindi, la polvere collassando e aggregandosi ha formato i cosiddetti "planetesimi", corpi solidi della dimensione di qualche chilometro, che scontrandosi e unendosi tra loro hanno formato i "protopianeti" [20], cioè i progenitori dei pianeti che conosciamo oggi. Ci si chiede però se sia proprio necessario ipotizzare che già la nube primordiale possedesse un proprio moto di rotazione, dovuto ad incontri/scontri con altre nubi. Questo appare, infatti, un approccio non risolutivo che non spiega l'origine dei movimenti delle nubi stesse che si urtano. Quindi perché invocare urti tra nebulose. Ciò comporterebbe, peraltro, che in tutti gli altri sistemi stellari dove ci sono pianeti che rivoluzionano attorno alla propria stella si devono essere verificati necessariamente analoghi urti primordiali tra nebulose.

Anche il moto di rotazione dei satelliti, molto spesso equiverso e sincrono con il moto di rivoluzione attorno al proprio pianeta, denuncia una comune origine degli stessi due movimenti, soprattutto se si considera che spesso il moto di rotazione e rivoluzione dei satelliti è anche concorde con il moto di rotazione e rivoluzione del pianeta attorno al Sole. Il fatto che i satelliti impieghino lo stesso tempo a ruotare attorno al proprio asse che a rivoluzionare attorno al proprio pianeta sembra essere una costante nel nostro sistema solare [21][22]

Nota 3.1. *Non tutti i pianeti presentano moto di rotazione universo e progrado. Venere ed Urano insieme a Plutone (non considerato più un pianeta) sono pianeti dotati di moto di rotazione retrogrado. Il moto retrogrado avviene in senso orario, cioè in modo opposto a quanto succede per tutti gli altri pianeti. I satelliti, come i pianeti nel nostro Sistema Solare, hanno in maggioranza un moto di rotazione e rivoluzione progrado, cioè da ovest a est (in senso antiorario vista*

dal Polo Nord), seguendo il senso comune del sistema, ma esistono eccezioni importanti come alcuni satelliti di Giove (es. Ammaltea, Teseo) o l'unica grande luna di Saturno, Titano, che ha una rotazione prograda ma una rivoluzione retrograda, mentre alcuni piccoli asteroidi satelliti hanno moto retrogrado, un fenomeno raro che si oppone al moto generale del Sistema Solare.

Possiamo citare ad esempio oltre la Luna, per quanto riguarda il nostro pianeta, Fobos e Deimos per Marte, Metis, Adrasteia, Amaltea, Tebe, Ganimede, Callisto, Io, Europa per Giove, Mimas, Encelado, Teti, Dione, Rea, Titano, Iperione, Giapeto per Saturno, Miranda, Ariel, Umbriel, Titania, Oberon, Ofelia per Urano. E' evidente che i satelliti abbiano mantenuto parte del momento angolare iniziale complessivo del pianeta, assumendo moto di rotazione con lo stesso verso, e che poi gli effetti mareali esercitati dal pianeta su ciascun satellite ne abbia rallentato il moto di rotazione medesimo fino a farlo coincidere, come tempistica, con quello di rivoluzione. Ma rimane sempre il fatto di stabilire l'origine dello stesso momento angolare complessivo. E' forse possibile ipotizzare che dietro ad ogni moto di rivoluzione/rotazione ci possa essere la medesima causa cioè la forza di gravità? Appare intanto condivisibile la deduzione che il moto di rotazione dei singoli pianeti dipende sostanzialmente dal momento angolare che presentava la nube di gas e polveri primordiale.

Esistono nubi di gas e polveri interstellari anche molto lontane dalle galassie, che formano il cosiddetto mezzo interstellare (ISM), ma il gas è certamente più abbondante all'interno delle galassie, in nubi di diverse densità e temperature che variano dalle calde e ionizzate (regioni HII) alle fredde e dense nubi molecolari, dove nascono le stelle, come la Nebulosa di Orione. Ci si chiede quanto possa essere probabile che queste nubi di gas isolate non subiscano scontri con altre nubi di gas tali da conferire loro un moto rotatorio. Cosa pressoché certa è invece l'esistenza di difformità densimetrica all'interno di queste nubi di gas. Ci si chiede quindi: questa difformità densimetrica durante la formazione di aggregati complessi di materia (stelle, pianeti o corpi minori) genera anche un loro moto rotatorio? Teniamo infatti in considerazione che, quando una regione collassa

gravitazionalmente, se la distribuzione è perfettamente simmetrica non nasce rotazione. Ma se esiste anche una piccola asimmetria, nasce momento angolare. A sostegno di questa tesi si può citare la tidal torque theory [17] [24]. Secondo la Tidal Torque Theory:

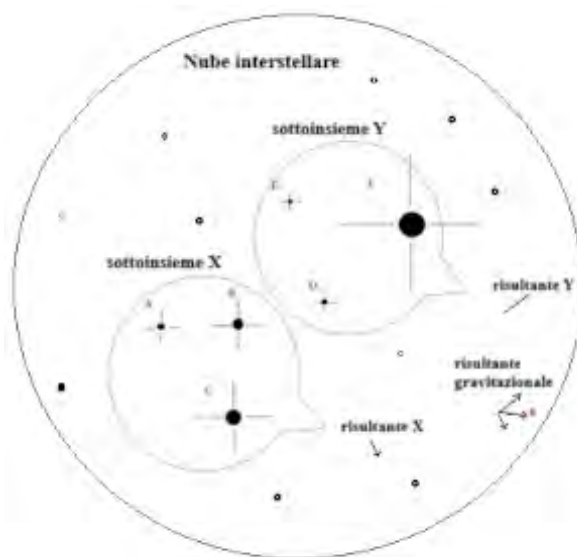
- Nell'universo primordiale la materia (soprattutto dark matter) era distribuita con piccole density fluctuations,
- Queste regioni leggermente più dense iniziavano a collassare gravitazionalmente per formare i dark matter halo, che diventeranno poi le galassie,
- Durante il collasso, le forze mareali gravitazionali provenienti dalle strutture vicine esercitano una coppia (torque) sulla protogalassia,
- Questa coppia fa acquisire rotazione alla struttura che si sta formando.

Sebbene la tidal torque theory offra una ipotesi sull'origine del momento angolare complessivo delle galassie essa stimola a riflettere su una possibile estensione dell'ipotesi anche a livello più ristretto come potrebbe essere quello di una singola nube di gas protostellare. Anche in questo ristretto ambito le forze mareali gravitazionali tra regioni di densità diversa possono generare torques durante il collasso. Forse, quindi, la nube originaria non deve necessariamente presentare un primordiale proprio momento angolare. Nel disco di una galassia a spirale (come la Via Lattea), stelle e gas ruotano prevalentemente nella stessa direzione del centro galattico. Tuttavia, le stelle nel bulge centrale o nell'alone galattico possono avere orbite molto più caotiche, inclinate o persino opposte. Esistono casi noti in cui il gas interstellare e le stelle nelle regioni esterne di una galassia ruotano in direzione contraria rispetto al nucleo, come osservato ad esempio nella galassia M64 (Galassia Occhio Nero). Moti retrogradi possono derivare da fusioni galattiche passate, interazioni gravitazionali o accrescimento di gas esterno che non si è allineato col disco preesistente. Proviamo adesso ad immaginare una lontana nube del

mezzo interstellare che per qualche ragione abbia momento angolare complessivo nullo. E' possibile, in tali condizioni, che la difformità densimetrica esistente al suo interno possa comunque determinare un momento angolare complessivo ed un conseguente moto rotatorio? Vediamo quindi come il moto primordiale della nube di gas e polveri possa derivare essenzialmente da effetti gravitazionali interni. Si consideri una vasta nube di gas e polveri che darà origine ad un nuovo sistema stellare (vedi figura 1). A causa della disomogenea distribuzione e densità della massa nella nebulosa in questione si formano degli addensamenti locali che possiamo immaginare dei singoli proto-nuclei destinati a subire futuri addensamenti per coalescenza. I differenti nuclei di addensamento della materia distribuiti in modo eterogeneo all'interno della nube determinano, quindi, richiami gravitazionali, con geodetiche radiali. Tali richiami gravitazionali possono generare un vettore rotatorio risultante in grado di conferire dinamicità oraria o antioraria alla nube stessa. Nel complesso la nube originaria, grazie al contributo di innumerevoli nuclei addensanti assumerà il proprio moto rotatorio e la propria direzione risultante (vedi figura seguente). In quest'ottica sembrerebbe che il movimento rotatorio possa essere solo una conseguenza indiretta della forza di gravità [23]. L'ipotesi è coerente con la tidal torque theory relativa alla formazione del momento angolare cosmico [24][25].

Riepilogando possiamo dire che durante il collasso:

- Piccole fluttuazioni di densità generano attrazioni non perfettamente radiali,
- Le forze mareali producono un momento torcente risultante,
- Le forze mareali producono un momento torcente risultante,
- Per conservazione del momento angolare la nube accelera la rotazione.
- Si forma un disco protoplanetario.



Origine del moto di rotazione: il disegno mostra come una distribuzione non uniforme della materia in una nube di gas interstellare possa essere il principale meccanismo alla base della genesi del moto di rotazione della stessa, quando quest'ultimo non sia già presente per altre cause.

4 Considerazioni conclusive

La breve riflessione fatta sulla correlazione esistente tra legge di gravitazione universale, terza legge di Keplero e velocità orbitale dei corpi celesti induce a ritenere, in generale, il movimento relativo dei corpi celesti come una conseguenza dell'attrazione gravitazionale tra di essi esercitata, dovuta sia a fenomeni mareali cosmici globali che ad analoghi fenomeni locali. Altra potente fonte di movimento dei corpi è legata alla esistenza delle cariche elettriche nella materia che fanno interagire particelle subatomiche, atomi, molecole e particelle di massa maggiore tra di loro. Tali forze elettriche agiscono poi anche sui corpi macroscopici avvicinandoli o allontanandoli. Numerosi sono gli esempi a tutti noti di movimenti indotti tramite l'utilizzo di cariche elettriche in movimento. Basti pensare a tutte le apparec-

chiature, domestiche o meno che siano, dotate di motori elettrici in grado di far fare, a numerose tipologie di macchine, una lunga serie di lavori utili all'uomo. In astrofisica poi i campi magnetici sono responsabili di numerosi fenomeni. Essi tendono a legare il plasma al loro moto ("congelamento" delle linee di campo), forzandolo a seguire forme complesse come spire, onde e archi, o accelerandolo violentemente quando il campo magnetico stesso si riconfigura. Insomma, forza gravitazionale da un lato e forza elettrica dall'altro garantiscono certamente la maggior parte dei tipi di movimento osservabile, sia esso microscopico che macroscopico [26][27]. Ma la domanda che rimane aperta è perché le forze generano movimento (avvicinando i corpi, come nel caso della forza di gravità, o anche allontanandoli, come nel caso della forza elettrica tra cariche dello stesso segno)? Non è facile rispondere a questa domanda. Tutti i moti avvengono nello spazio-tempo e forse la risposta si cela nella particolare natura dello spaziotempo stesso [28][29].

5 Bibliografia

1. Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. •. Zanichelli, 2019.
2. Newton, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. 1687.
3. Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. *Mechanics*. Elsevier, 1976.
4. Kepler, J. *Harmonices Mundi*. 1619.
5. Smart, W. M. *Textbook on Spherical Astronomy*. Cambridge University Press, 1977.
6. Taylor, J. R. *Classical Mechanics*. University Science Books, 2005.
7. Einstein, A. *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. *Annalen der Physik*, 1916.
8. Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. *Gravitation*. Freeman, 1973.

9. Hawking, S., & Ellis, G. F. R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, 1973.
10. Liddle, A. *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley, 2015.
11. Weinberg, S. *The First Three Minutes*. Basic Books, 1977.
12. Peebles, P. J. E. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, 1993.
13. Kolb, E. W., & Turner, M. S. *The Early Universe*. Addison-Wesley, 1990.
14. Hartmann, L. *Accretion Processes in Star Formation*. Cambridge Univ. Press, 2009.
15. Armitage, P. J. *Astrophysics of Planet Formation*. Cambridge Univ. Press, 2020.
16. Padmanabhan, T. *Structure Formation in the Universe*. Cambridge Univ. Press, 1993.
17. Catelan, P., & Theuns, T. "Evolution of Angular Momentum in the Cosmological Context." *MNRAS* 282, 455–469 (1996).
18. Prialnik, D. *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*. Cambridge Univ. Press, 2010.
19. Shu, F. H. *The Physics of Astrophysics, Vol. II: Gas Dynamics*. University Science Books, 1992.
20. Boss, A. P. "Formation of Planetary Systems by Gravitational Instability." *Science*, 276, 1836 (1997).
21. Murray, C. D., & Dermott, S. F. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 1999. .
22. Canup, R. M., & Ward, W. R. "Origin of the Moon and Outer Satellites." *Nature*, 441, 834–839 (2006).

23. Jeans, J. H. *Astronomy and Cosmogony*. Cambridge University Press, 1928.
24. Peebles, P. J. E. "Origin of the Angular Momentum of Galaxies." *ApJ*, 155, 393 (1969).
25. White, S. D. M. "Angular Momentum Growth in Protogalaxies." *ApJ*, 286, 38 (1984).
26. Griffiths, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge Univ. Press, 2017.
27. Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. II. Addison-Wesley, 1964.
28. Greene, B. *The Fabric of the Cosmos*. Knopf, 2004.
29. Rovelli, C. *La realtà non è come ci appare*. Cortina, 2014.

QUASICRISTALLI

INTRECCI SEGRETI FRA NATURA SCIENZA E ARTE

Ideazione del progetto **Ugo Locatelli**
Curatori **Carlo Francou, Luca Nicotra**
Introduzione **Luca Bindi**



Contributi
Battistutta
Fiorani
Gagliardi
Gazzola
Lezoli
Mocchi
Morbidelli


Universitalia

Analisi relativistica del selettore di velocità

Pietro Velonà*

DOI:10.53159/PdM(V).v1n1.168

Ricevuto 29-03-2026 Accettato 30-03-2026 Pubblicato 30-04-2026



Abstract: *The present paper proposes a study of the speed selector, in which the relations used in the theory of electromagnetism in the context of relativistic dynamics are applied. In the first part, more theoretical, the second law of dynamics is initially examined. An analysis of the forces is then conducted for an electron that has arrived inside the selector, using the analytical tools introduced above. The goal is to determine the possible trajectories made by the particle as one of the characteristic quantities of the problem varies. Only the case in which the acceleration along the axis of the selector is zero is considered, referring to other works for a more complete analysis*

Keywords: Speed selector; relativistic dynamics

Sommario: *Il presente lavoro propone uno studio del selettore di velocità, in cui sono applicate le relazioni utilizzate nella teoria dell'elettromagnetismo nell'ambito della dinamica relativistica.*

*IIS Mazzone, Roccella Jonica, Italia; velomapi@libero.it

Nella prima parte, più teorica, si esamina inizialmente la seconda legge della dinamica. Si conduce, quindi, un'analisi delle forze, per un elettrone giunto all'interno del selettore, utilizzando gli strumenti analitici introdotti in precedenza. L'obiettivo è di determinare le possibili traiettorie compiute dalla particella al variare di una delle grandezze caratteristiche del problema. Si considera soltanto il caso in cui l'accelerazione lungo l'asse del selettore è nulla, rimandando ad altri lavori per un'analisi più completa.

Parole chiave: selettore di velocità; dinamica relativistica

1 Introduzione

Nei libri di fisica del liceo (Amaldi, 2025a; Cutnell, Johnson, Young, Stadler, 2024) si effettua l'analisi del selettore di velocità quando si vogliono studiare gli effetti dell'azione congiunta di un campo elettrico e di un campo magnetico su una carica in moto. Utilizzando le relazioni della Meccanica Classica (MC), si cerca di evidenziare la condizione di equilibrio delle forze agenti, determinando il valore della velocità che consente alla particella di non deflettere rispetto all'asse del selettore.

Per quanto riguarda la definizione della traiettoria di una particella carica in moto, rimanendo in MC, si sa che se quest'ultima entra in un campo elettrico uniforme con velocità iniziale perpendicolare ad esso, allora il moto è di tipo parabolico (Amaldi, 2025a; Cutnell et al., 2024). Se entra in un campo magnetico uniforme, con velocità perpendicolare, allora il suo moto è di tipo circolare uniforme (Amaldi, 2025a; Cutnell et al., 2024). Se la velocità iniziale, invece, ha anche un componente parallelo al campo magnetico, allora il moto è di tipo elicoidale (Amaldi, 2025a; Cutnell et al., 2024). Il caso di una carica che si muove in un campo magnetico non uniforme è analizzato in uno studio recente (Bocelli, 2009).

L'idea del presente articolo nasce dallo studio del “paradosso del condensatore” (Fabri, 2005; Fabri, 2016); nel secondo riferimento, l'autore sottolinea che i fenomeni elettromagnetici richiedono l'uti-

lizzo degli strumenti validi nella Relatività Ristretta (RR), anziché quelli più noti in MC. In entrambi i contesti vale il principio di relatività, però, mentre in MC si considerano le equazioni di Maxwell più le leggi della dinamica newtoniana, in RR le prime sono associate alle leggi della dinamica relativistica. In tal modo, con ipotesi di lavoro più generali, si evita l'insorgere di situazioni paradossali. Rimanendo in RR, si dimostra anche (Fabri, 2016) che la traiettoria di un elettrone, che entra in un condensatore, è una catenaria.

In questo lavoro, viene considerato un selettore di velocità e proposta un'analisi non nell'ambito della MC, come solitamente si fa a scuola, ma utilizzando, invece, le relazioni della dinamica relativistica. Esaminando la situazione in cui l'accelerazione lungo l'asse del selettore è nulla, sono studiati due sottocasi e ricavate le traiettorie, al variare di una delle grandezze caratteristiche del problema analizzato.

Va precisato che gli strumenti analitici utilizzati sono compatibili con gli argomenti studiati in un corso di matematica e fisica di un liceo scientifico. Pertanto, lo studente curioso può verificare i procedimenti riportati e giungere, come l'autore, ai risultati finali. In tal modo, viene rivisitata l'idea di creare un laboratorio di conoscenze (Velonà, 2019), in cui si approfondiscono argomenti, tematiche svolte in classe, si effettuano calcoli matematici, si analizzano significati fisici, con il fine di suscitare un maggiore interesse e non ridurre la didattica ad una mera esposizione di contenuti.

2 Seconda legge della dinamica

In MC la seconda legge della dinamica afferma che “se su un corpo agisce un sistema di forze, la risultante applicata al corpo $\vec{F}$ possiede direzione e verso della sua accelerazione e modulo direttamente proporzionale a quello di $\vec{a}$ ”. Essa è riassumibile nella nota equazione di Newton:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \longrightarrow \vec{F} = m \vec{a}, \quad (1)$$

dove m è la massa del corpo. Ricordando che, solitamente, m è costante e che l'accelerazione vettoriale istantanea è la derivata della velocità vettoriale istantanea (indicata con $\vec{u}$), si ha:

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (2)$$

cioè la forza $\vec{F}$ è la derivata della quantità di moto $\vec{p}$, con $\vec{p} = m \vec{u}$.

In RR vale la (2) che non implica la (1). In questa sezione, a partire dalla (2), si vuole ricavare, quindi, la relazione corrispondente alla (1) ma valida in RR. Ricordiamo che l'espressione relativistica della quantità di moto è data da (Amaldi, 2025b):

$$\vec{p} = \gamma m \vec{u}, \quad (3)$$

in cui

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

è il fattore di contrazione di Lorentz (Amaldi, 2025b).

Dalla (2), tenendo conto della (3) e applicando il teorema di derivazione delle funzioni composte (valido anche per funzioni vettoriali), si ha:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \left(\frac{d\gamma}{dt} \vec{u} + \gamma \frac{d\vec{u}}{dt} \right) = m \left(\frac{d\gamma}{dt} \vec{u} + \gamma \vec{a} \right). \quad (4)$$

L'espressione relativa a $\frac{d\gamma}{dt}$ è data da (si veda l'appendice):

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{a}). \quad (5)$$

(Il puntino indica il prodotto scalare tra i due vettori.)

Sostituendo la (5) nella (4), si ottiene:

$$\vec{F} = \gamma m \left(\frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{a}) \vec{u} + \vec{a} \right). \quad (6.1)$$

Se consideriamo un riferimento inerziale S e ad esso associamo un sistema di coordinate (Oxy) , possiamo scrivere le due equazioni scalari corrispondenti alla (6.1):

$$F_x = \gamma m \left(\frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{a}) u_x + a_x \right), \quad (6.2)$$

$$F_y = \gamma m \left(\frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{a}) u_y + a_y \right). \quad (6.3)$$

Se si moltiplica scalarmente la (6.1) per la velocità e si tiene conto che il prodotto scalare di un vettore per se stesso è uguale al quadrato del modulo del vettore stesso, si ha:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{u} &= \gamma m \left(\frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{a}) \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{a} \cdot \vec{u} \right) = \\ &= \gamma m \left(\frac{\gamma^2}{c^2} u^2 (\vec{u} \cdot \vec{a}) + \vec{a} \cdot \vec{u} \right) = \gamma m \left(\frac{\gamma^2}{c^2} u^2 + 1 \right) (\vec{u} \cdot \vec{a}). \end{aligned}$$

Dall'espressione del fattore di contrazione di Lorentz, si deduce che:

$$\frac{\gamma^2}{c^2} u^2 = \gamma^2 - 1$$

e, quindi:

$$\vec{F} \cdot \vec{u} = \gamma^3 m (\vec{u} \cdot \vec{a}).$$

Ricaviamo l'espressione del prodotto scalare $(\vec{u} \cdot \vec{a})$ e sostituiamola nella (6.1):

$$\vec{F} = \gamma m \left(\frac{\gamma^2}{c^2} \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{\gamma^3 m} \vec{u} + \vec{a} \right) \longrightarrow \vec{F} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c^2} \vec{u} + \gamma m \vec{a};$$

si può scrivere, pertanto:

$$\vec{a} = \frac{1}{\gamma m} \left(\vec{F} - \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c^2} \vec{u} \right). \quad (7.1)$$

Le due equazioni scalari corrispondenti alla (7.1) sono:

$$a_x = \frac{1}{\gamma m} \left(F_x - \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c^2} u_x \right), \quad (7.2)$$

$$a_y = \frac{1}{\gamma m} \left(F_y - \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c^2} u_y \right). \quad (7.3)$$

Dalla (6.1) si deduce che:

1. rispetto alla MC, la forza non ha, in generale, direzione parallela all'accelerazione;
2. se $\vec{a} = \vec{0}$, allora $\vec{F} = \vec{0}$.

Dalle (6.2) e (6.3) si ottiene che:

1. se una delle componenti di $\vec{a}$ è nulla, ad esempio $a_x = 0$, allora si ha

$$F_x = \frac{\gamma^3 m}{c^2} u_x u_y a_y,$$

cioè la componente lungo x della forza dipende anche dalle componenti della velocità e dell'accelerazione lungo l'asse y ;

2. nel caso di un moto rettilineo, ad esempio lungo l'asse x , si ottiene

$$F_x = \gamma m \left(\frac{\gamma^2 u_x^2}{c^2} + 1 \right) a_x = \gamma m \left((\gamma^2 - 1) + 1 \right) a_x \longrightarrow$$

$$F_x = \gamma^3 m a_x.$$

Dalla (7.1) si ricava che:

1. se $u \rightarrow c$, allora $\gamma \rightarrow \infty$, pertanto l'accelerazione è nulla qualunque sia $\vec{F}$;
2. se $\vec{F} = \vec{0}$, allora $\vec{a} = \vec{0}$.

Dalle (7.2) e (7.3) si ottiene che:

1. se una delle componenti di $\vec{F}$ è nulla, ad esempio $F_x = 0$, allora si ha

$$a_x = -\frac{F_y}{\gamma m} \frac{u_x u_y}{c^2};$$

2. nel caso di un moto rettilineo, ad esempio lungo l'asse x , si ottiene

$$a_x = \frac{F_x}{\gamma^3 m}.$$

3 Il selettore di velocità

Consideriamo un condensatore (posto nel vuoto, senza alcuna perdita di generalità) ed un sistema di riferimento S solidale con esso e con l'asse x parallelo al suo asse (Fig. 1).

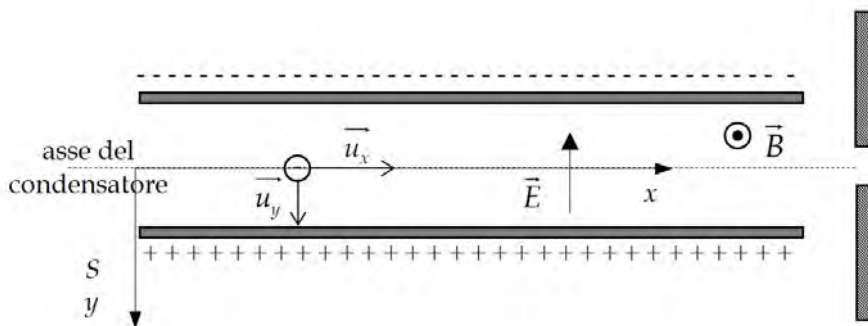


Fig. 1 Schema del selettore.

Sulle armature, di area A , è presente una carica Q . Indichiamo con σ la densità di carica superficiale. Il campo elettrico $\vec{E}$ è diretto secondo l'asse y e il suo verso va dall'armatura positiva a quella negativa. Il modulo è dato dalla seguente relazione:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

essendo $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$ la costante dielettrica nel vuoto.

Un solenoide, con asse perpendicolare a quello del condensatore, è posto all'esterno. Esso è costituito da N spire e la sua lunghezza è pari ad l (sia $n = N/l$ la densità lineare di spire). Su di esso circola una corrente i , in verso antiorario, che genera un campo magnetico $\vec{B}$, perpendicolare al piano del condensatore e con verso uscente. Il modulo è dato dalla relazione:

$$B = \mu_0 n i,$$

essendo $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ la permeabilità magnetica nel vuoto.

Indichiamo con k il rapporto tra il prodotto del quadrato della velocità della luce e il modulo del campo magnetico e il modulo del campo elettrico:

$$k = \frac{c^2 B}{E} = \frac{c^2 \mu_0 n i}{\frac{\sigma}{\epsilon_0}} = \frac{c^2 \mu_0 \epsilon_0 n i}{\sigma} = \frac{n i}{\sigma}, \quad (8)$$

ricordando che c , velocità della luce, si può scrivere come (Amaldi, 2025b)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}.$$

Notiamo che il parametro introdotto, k , ha le dimensioni di una velocità.

4 Analisi delle forze

Supponiamo che un elettrone entri all'interno della regione delimitata dal condensatore in corrispondenza del suo asse. La sua velocità lungo l'asse x è u_x , inizialmente uguale a v , e lungo l'asse y è u_y , inizialmente uguale a zero. Analizziamo le forze agenti sulla particella nel sistema di riferimento S . L'elettrone subisce, lungo l'asse y , una forza elettrica $\vec{F}_E$ ed un componente della forza di Lorentz, $\vec{F}_{B,y}$, legato al componente della velocità $\vec{u}_x$ (si trascura la

forza peso, poiché poco significativa rispetto a quelle presenti) e, lungo l'asse x , l'altro componente della forza di Lorentz, $\vec{F}_{B,x}$, legato a $\vec{u}_y$ (Fig. 2).

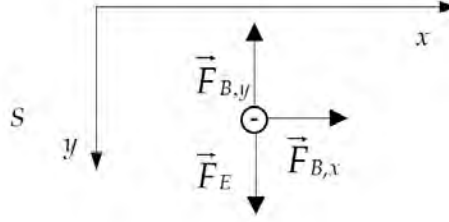


Fig. 2 Forze agenti sull'elettrone.

Indicate con F_x e F_y le componenti della forza risultante, si ha (Amaldi, 2025a):

$$F_x = F_{B,x} = e B u_y, \quad (9.1)$$

$$F_y = F_E - F_{B,y} = e (E - B u_x). \quad (9.2)$$

5 Applicazioni delle equazioni del moto nel caso di accelerazione nulla lungo l'asse x

Sostituiamo le (9.1) e (9.2) nelle (7.2) e (7.3), tenendo conto della definizione del parametro k :

$$a_x = \frac{e E}{\gamma m} \left(\frac{k - u_x}{c^2} \right) u_y, \quad (10.1)$$

$$a_y = \frac{e E}{\gamma m} \left(1 - \frac{k u_x}{c^2} - \frac{u_y^2}{c^2} \right). \quad (10.2)$$

Analizziamo nel seguito il caso in cui la componente lungo l'asse x dell'accelerazione sia nulla. Si hanno i seguenti sottocasi:

1. la componente della velocità lungo l'asse y è uguale a zero, $u_y = 0$;

2. la componente della velocità lungo l'asse y è diversa da zero, $u_y \neq 0$, e, quindi, $u_x = k$.

Sviluppiamo il caso A.

Se $u_y = 0$, allora $a_y = 0$. Dalla (10.2) si ottiene l'espressione costante della velocità lungo l'asse x :

$$u_x = v = \frac{c^2}{k} = \frac{E}{B}. \quad (11.1)$$

Dalla (9.1) si ha che $F_x = 0$. Sostituendo la (11.1) nella (9.2), si ottiene $F_y = 0$.

Osservazione 5.1. *La particella non subisce deflessione e si muove di moto rettilineo uniforme con velocità uguale in modulo al rapporto tra i moduli dei due campi. È questo il caso del selettore studiato a scuola senza la RR!*

Inoltre, poiché u_x è minore di c (conseguenza dei postulati della RR), si deduce:

$$u_x < c \longrightarrow \begin{cases} \frac{c^2}{k} < c \longrightarrow c < k \\ \frac{E}{B} < c \end{cases} \longrightarrow \frac{E}{B} < c < k. \quad (11.2)$$

Considerando la (8), si ricava un'ulteriore condizione da $c < k$:

$$c < k \longrightarrow c < \frac{ni}{\sigma} \longrightarrow i > \frac{\sigma c}{n}. \quad (11.3)$$

Osservazione 5.2. *Se una particella entra in un selettore con velocità iniziale data dalla (11.1) e vale la condizione (11.3), allora la sua traiettoria è rettilinea.*

Sviluppiamo il caso B.

Se $u_y \neq 0$, allora deve essere:

$$u_x = v = k. \quad (12.1)$$

Poiché u_x è minore di c , si può scrivere:

$$u_x < c \longrightarrow \begin{cases} k < c \\ \frac{c^2 B}{E} < c \longrightarrow c < \frac{E}{B} \end{cases} \longrightarrow k < c < \frac{E}{B}. \quad (12.2)$$

Considerando la (8), si ricava un'ulteriore condizione da $k < c$:

$$k < c \longrightarrow \frac{n i}{\sigma} < c \longrightarrow i < \frac{\sigma c}{n}. \quad (12.3)$$

Dalla (10.2) si ha:

$$a_y = \frac{e E}{\gamma m} \left(1 - \frac{k u_x}{c^2} - \frac{u_y^2}{c^2} \right) = \frac{e E}{m} \sqrt{\left(1 - \frac{k u_x}{c^2} - \frac{u_y^2}{c^2} \right)^3}. \quad (12.4)$$

Notiamo che la a_y è maggiore di zero; pertanto, la u_y deve essere una funzione crescente del tempo. Se la particella entra nel selettore con la componente lungo y della velocità iniziale uguale a zero, tale componente, dovendo crescere, assumerà valori positivi. Questo significa che il componente corrispondente avrà verso concorde con quello dell'asse y .

Effettuiamo la seguente posizione:

$$L^2 = 1 - \frac{k^2}{c^2} > 0.$$

La quantità L è adimensionale.

La (12.4) diventa:

$$\frac{1}{L^3} \frac{du_y}{\sqrt{\left(1 - \frac{u_y^2}{L^2 c^2} \right)^3}} = \frac{e E}{m} dt.$$

Integriamo membro a membro:

$$\frac{1}{L^3} \int_0^{u_y} \frac{d\bar{u}_y}{\sqrt{\left(1 - \frac{\bar{u}_y^2}{L^2 c^2} \right)^3}} = \frac{e E}{m} \int_0^t d\bar{t}. \quad (12.5)$$

Per risolvere il primo membro poniamo $\frac{\bar{u}_y}{Lc} = \text{sen}(\bar{z})$; infatti, la quantità sotto radice al secondo membro della (12.4) è positiva e, quindi, si ha:

$$1 - \frac{k^2}{c^2} - \frac{u_y^2}{c^2} > 0 \longrightarrow \frac{u_y^2}{c^2} < L^2 \longrightarrow \frac{u_y^2}{L^2 c^2} < 1.$$

Procediamo per sostituzione:

$$\frac{1}{L^3} \int_0^z \frac{Lc}{\cos^2(\bar{z})} d\bar{z} = \frac{c}{L^2} \tan(z). \quad (12.6)$$

Nota 5.1. *Un po' di goniometria...*

Ricordiamo che la tangente di un angolo z è uguale al rapporto tra il seno e il coseno dello stesso angolo:

$$\tan(z) = \frac{\text{sen}(z)}{\cos(z)}.$$

Esprimendo il coseno in funzione del seno e nell'ipotesi in cui esso sia positivo, si ha:

$$\tan(z) = \frac{\text{sen}(z)}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(z)}}.$$

Se $z = \arcsen$ e ricordando che la funzione arcoseno è l'inversa della funzione seno, allora si ottiene:

$$\tan(z) = \tan(\arcsen(t)) = \frac{\text{sen}(\arcsen(t))}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\arcsen(t))}} = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Tenendo conto delle indicazioni contenute nella nota precedente, la (12.6) diventa:

$$\frac{c}{L^2} \tan\left(\arcsen\left(\frac{u_y}{Lc}\right)\right) = \frac{c}{L^2} \frac{\frac{u_y}{Lc}}{\sqrt{1 - \frac{u_y^2}{L^2 c^2}}}.$$

Risolvendo la (12.5), si ottiene:

$$\frac{\frac{u_y}{L c}}{\sqrt{1 - \frac{u_y^2}{L^2 c^2}}} = \left(\frac{e E}{m c} L \right) L t = H L t. \quad (12.7)$$

avendo posto

$$H = \frac{e E}{m c} L.$$

La quantità H ha le dimensioni del reciproco di un tempo.

Eleviamo la (12.7) al quadrato:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{u_y^2}{L^2 c^2}}{1 - \frac{u_y^2}{L^2 c^2}} &= H^2 L^2 t^2, \\ \frac{u_y^2}{L^2 c^2} &= H^2 L^2 t^2 \left(1 - \frac{u_y^2}{L^2 c^2} \right), \\ (1 + H^2 L^2 t^2) \frac{u_y^2}{L^2 c^2} &= H^2 L^2 t^2, \\ u_y &= L c \frac{H L t}{\sqrt{1 + H^2 L^2 t^2}}. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Se integriamo la (12.8), si deduce la legge del moto lungo l'asse y :

$$y = \frac{c}{H} \left(\sqrt{1 + H^2 L^2 t^2} - 1 \right). \quad (12.9)$$

Calcoliamo la traiettoria della particella. L'equazione del moto lungo l'asse x è:

$$x = k t. \quad (12.10)$$

Se ricaviamo il tempo dalla (12.10) e sostituiamo l'espressione nella (12.9), si ottiene:

$$y = \frac{c}{H} \left(\sqrt{1 + H^2 L^2 \frac{x^2}{k^2}} - 1 \right) \longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
y + \frac{c}{H} &= \frac{c}{H} \sqrt{1 + H^2 L^2 \frac{x^2}{k^2}} \longrightarrow \\
\left(y + \frac{c}{H}\right)^2 &= \frac{c^2}{H^2} \left(1 + H^2 L^2 \frac{x^2}{k^2}\right) \longrightarrow \\
y^2 + \cancel{\frac{c^2}{H^2}} + 2 \frac{c}{H} y &= \cancel{\frac{c^2}{H^2}} + \cancel{\frac{c^2}{H^2}} H^2 L^2 \frac{x^2}{k^2} \longrightarrow \\
\frac{c^2 L^2}{k^2} x^2 - y^2 - 2 \frac{c}{H} y &= 0. \tag{12.11}
\end{aligned}$$

Nota 5.2. *Riprendiamo le coniche...*

Una conica è rappresentata nel piano cartesiano da un'equazione di secondo grado nelle variabili x e y :

$$a x^2 + b x y + c y^2 + d x + e y + f = 0.$$

In generale si dimostra che l'equazione scritta sopra rappresenta:

- un'ellisse, se $b^2 - 4ac < 0$;
- una parabola, se $b^2 - 4ac = 0$;
- un'iperbole, se $b^2 - 4ac > 0$.

Con riferimento alla nota precedente e alla (12.11), possiamo scrivere:

$$a = \frac{c^2 L^2}{k^2}, \quad b = 0, \quad c = -1.$$

Pertanto, la (12.11) è un'iperbole.

Osservazione 5.3. *Se una particella entra in un selettore con velocità iniziale data dalla (12.1) e vale la condizione (12.3), allora la sua traiettoria è un'iperbole.*

Va precisato che dall'analisi dei due casi esiste un valore limite della corrente, i_{lim} , uguale a:

$$i_{lim} = \frac{\sigma c}{n}.$$

Da notare che nel caso in cui la corrente tende al valore limite, $i \rightarrow i_{lim}$, allora la componente della velocità lungo x tende alla velocità della luce, $u_x \rightarrow c$.

Rappresentiamo in un unico grafico e nei casi A e B gli andamenti della componente della velocità lungo l'asse x , u_x , in funzione di k e del rapporto $\frac{E}{B}$ e di $\frac{E}{B}$ in funzione di k (Fig. 3).

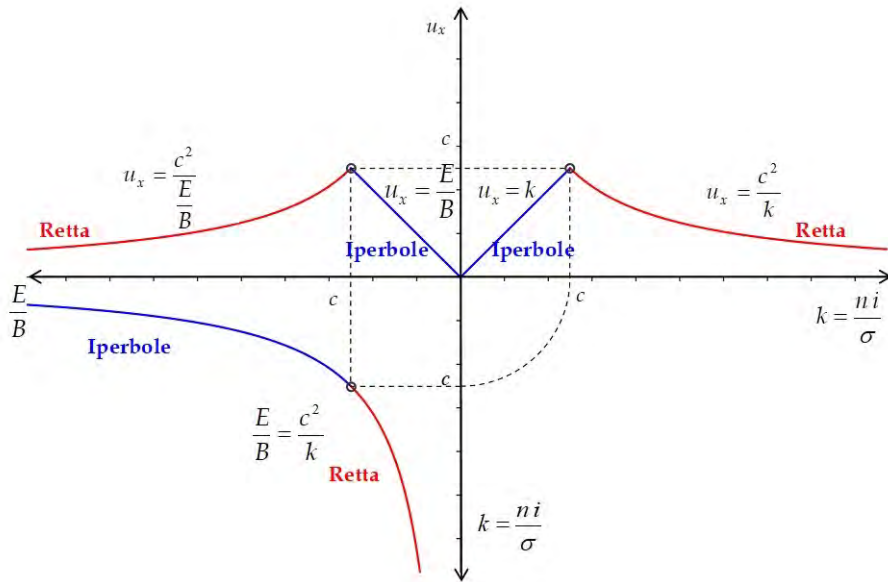


Fig. 3 Grafici di u_x in funzione di k e di E/B .

Nel caso A (colore rosso), la traiettoria è una retta, gli andamenti della u_x in funzione di k e di $\frac{E}{B}$ sono rami di iperbole. È facile verificare la condizione (11.2).

Nel caso B (colore blu), la traiettoria è un'iperbole, gli andamenti della u_x in funzione di k e di $\frac{E}{B}$ sono tratti di retta. È facile verificare la condizione (12.2).

Analizziamo i casi studiati in MC. Intanto le equazioni del moto (10.1) e (10.2) diventano:

$$a_x = \frac{e}{m} B u_y, \quad (13.1)$$

$$a_y = \frac{e}{m} (E - B u_x). \quad (13.2)$$

Nel caso A, $u_y = 0$. Pertanto, anche $a_y = 0$, $F_x = 0$ e $F_y = 0$. Dalla (13.2) si ricava la nota condizione per la velocità, identica alla (11.1). Si fa presente che la traiettoria è rettilinea per qualsiasi valore di corrente. Il caso B non si può verificare, in quanto se $u_y \neq 0$, allora dalla (13.1) anche $a_x \neq 0$, contro l'ipotesi di accelerazione nulla lungo l'asse x .

6 Rappresentazioni grafiche

Sono rappresentate nel seguito le traiettorie dell'elettrone dopo aver fissato i valori delle grandezze principali considerate nel caso analizzato, cioè quelli relativi alla carica e alla massa di un elettrone, e , m , alla carica distribuita sulle armature del condensatore, Q , all'area delle armature, A , al numero di spire del solenoide, N , e alla sua lunghezza, l (Tab. 1).

Tabella 1 - Valori delle grandezze principali

Grandezza	Valore	Unità di misura
e	$1,60 \times 10^{-19}$	C
m	$9,31 \times 10^{-31}$	kg
Q	$1,00 \times 10^{-9}$	C
A	$2,00 \times 10^{-3}$	m ²
N	$5,00 \times 10^2$	—
l	$2,00 \times 10^{-2}$	m

Da questi si ricavano i valori di altre grandezze derivate; in particolari, quelli associati alla densità superficiale di carica σ , al modulo del campo elettrico, E , al valore limite della corrente, i_{lim} (Tab. 2).

Di seguito sono considerati quattro casi corrispondenti a quattro differenti valori della corrente, i . Per ciascuno di essi è possibile calcolare il modulo del campo magnetico, B , e il valore del parametro k .

Tabella 2 - Valori delle grandezze derivate

Grandezza	Valore	Unità di misura
σ	$5,00 \times 10^{-7}$	C/m ²
E	$5,67 \times 10^4$	N/C
i_{lim}	$6,00 \times 10^{-2}$	A

1. Consideriamo una corrente al di sotto del valore limite:

$$i = 1,50 \times 10^{-2} \text{ A.}$$

I valori del modulo del campo magnetico, B , e del parametro k sono uguali a:

$$B = 4,71 \times 10^{-5} \text{ T,}$$

$$k = 7,50 \times 10^7 \text{ m/s.}$$

In queste condizioni, la particella descrive una traiettoria iperbolica ma non esce dal selettore (Fig. 4).

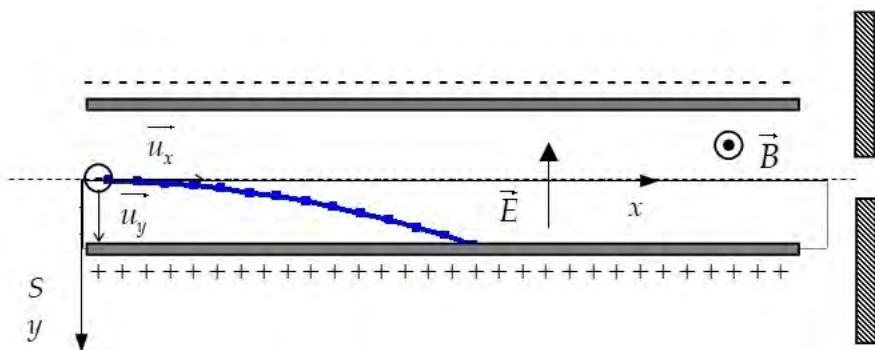


Fig. 4 Traiettoria iperbolica (caso 1).

2. Consideriamo una corrente al di sotto del valore limite:

$$i = 2,50 \times 10^{-2} \text{ A.}$$

I valori del modulo del campo magnetico, B , e del parametro k sono uguali a:

$$B = 7,85 \times 10^{-5} \text{ T},$$

$$k = 1.25 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

La particella descrive una traiettoria iperbolica ed esce dal selettore, poiché cresce il valore della u_x . (Fig. 5).

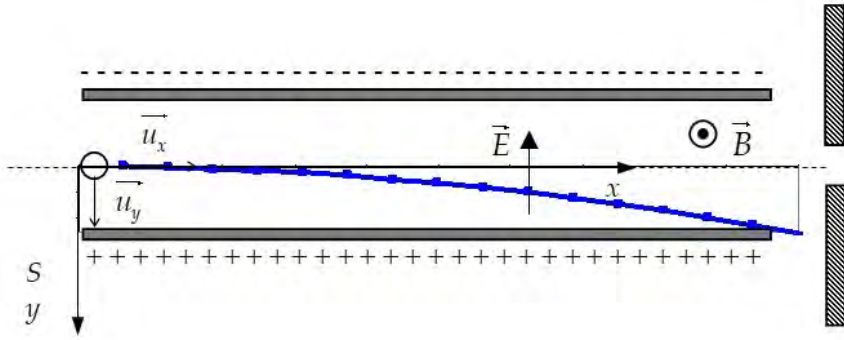


Fig. 5 Traiettoria iperbolica (caso 2).

3. Consideriamo una corrente al di sotto del valore limite:

$$i = 4,50 \times 10^{-2} \text{ A}.$$

I valori del modulo del campo magnetico, B , e del parametro k sono uguali a:

$$B = 1,41 \times 10^{-4} \text{ T},$$

$$k = 2.25 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

La particella descrive una traiettoria iperbolica ed esce dal selettore avvicinandosi all'asse del condensatore (Fig. 6).

4. Consideriamo una corrente al di sopra del valore limite:

$$i = 6,50 \times 10^{-2} \text{ A}.$$

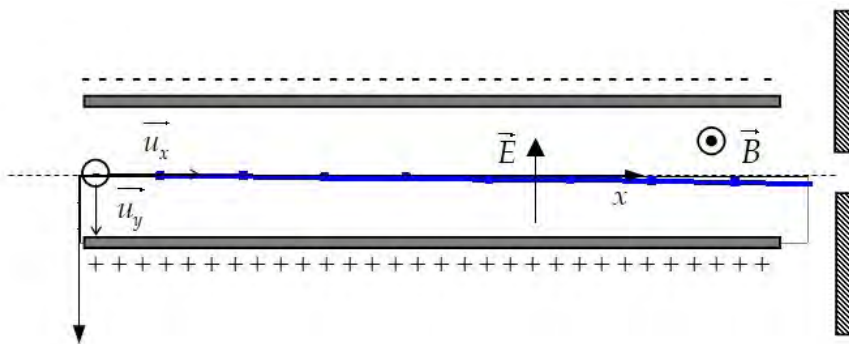


Fig. 6 Traiettoria iperbolica (caso 3).

I valori del modulo del campo magnetico, B , e del parametro k sono uguali a:

$$B = 2,04 \times 10^{-4} \text{ T},$$

$$k = 3.25 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

La particella descrive una traiettoria rettilinea (Fig. 7).

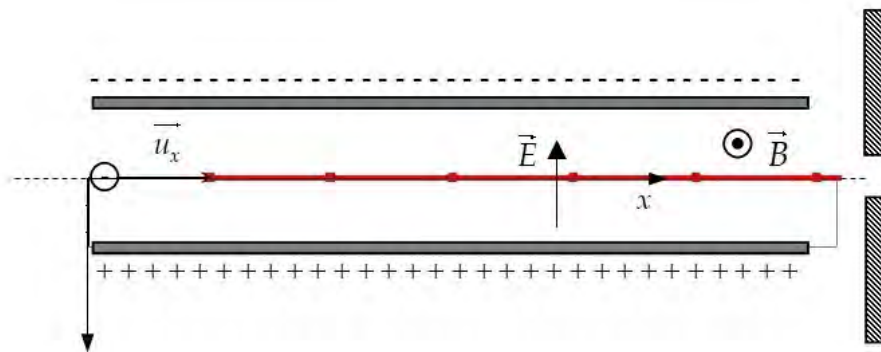


Fig. 7 Traiettoria rettilinea (caso 4).

7 Conclusioni

Nel presente articolo è stato analizzato il selettore di velocità, utilizzando la seconda legge della dinamica nella sua formulazione

in RR. Sono state determinate le traiettorie di un elettrone nel caso in cui la componente dell'accelerazione lungo l'asse del selettore è uguale a zero, al variare di una delle grandezze considerate nell'analisi, cioè la corrente che genera il campo magnetico. Il lavoro ha consentito di rivisitare un risultato noto, quello relativo alla velocità di una particella che non subisce deflessione, applicando strumenti differenti da quelli noti in MC, e di rivedere lo stretto legame tra elettromagnetismo e RR.

8 Appendice

Dimostriamo l'espressione della derivata del fattore di contrazione di Lorentz γ rispetto al tempo.

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^3}} \left(-\frac{2u}{c^2} \right) \frac{du}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} u \frac{du}{dt}.$$

Calcoliamo la derivata del prodotto scalare di un vettore per se stesso:

$$\frac{d(\vec{u} \cdot \vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 2 \vec{u} \cdot \vec{a},$$

oppure

$$\frac{d(\vec{u} \cdot \vec{u})}{dt} = \frac{d(u^2)}{dt} = 2u \frac{du}{dt}.$$

Pertanto, si ha:

$$u \frac{du}{dt} = \vec{u} \cdot \vec{a}.$$

E, sostituendo nella prima espressione, si ottiene:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{a}).$$

9 Bibliografia

1. Amaldi U. (2025a). *L'Amaldi.blu. Onde, Campo elettrico e magnetico*, volume 2, quarta edizione. Bologna: Zanichelli.
2. Amaldi U. (2025b). *L'Amaldi.blu. Induzione e onde elettromagnetiche, Relatività e quanti*, volume 3, quarta edizione. Bologna: Zanichelli.
3. Bocelli S. (2009). “Moto delle cariche in un campo magnetico non uniforme”. In «*La Fisica nella Scuola*», volume XLII, 4.
4. Cutnell J. D., Johnson K. W., Young D., Stadler S. (2024). *La fisica di Cutnell e Johnson. Onde, campo elettrico e magnetico*, volume 2, seconda edizione. Bologna: Zanichelli.
5. Fabri E. (2005). “Insegnare Relatività nel XXI secolo, dal ‘Navilio’ di Galileo all’espansione dell’Universo”. In «*La Fisica nella Scuola*», volume XXXVIII, quaderno 16.
6. Fabri E. (2016). “Il paradosso del condensatore”. In «*La Fisica nella Scuola*», volume XLIX, 3.
7. Velonà P. (2019). “Una nuova idea di laboratorio per capire la relatività ristretta”. In «*Giornale di Fisica*», volume LX, N 3. Bologna: Editore SIF.

70 anni di Intelligenza Artificiale

Cos'è - Come funziona - Limiti - Rischi

a cura di
Luca Nicotra



Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence, 1956.

Contributi di:

Luca Nicotra, Pierluigi Assogna, Paolo Severino Manca,
Luigi Campanella, Giordano Bruno, Ezio Sciarra,
Dulio Carpitella, Armando Guidoni, Leonardo Maria Rocca,
Carmela Silvia Messina, Mariangela Vanalli, Andrea Manzo,
Vincenzo Luca Messina, Violetta Chiarini.

numero

16

in riga
edizioni 
Tecnologia
e innovazione

Bisettrice di un angolo e coppie ordinate di rette inverse

Franco Fernicola* Giovanni Forlenza†

DOI:10.53159/PdM(V).v1n1.169

Ricevuto 21-04-2026 Accettato 28-04-2026 Pubblicato 30-04-2026



Abstract: *In this article it is demonstrated, given an orthogonal monometric Cartesian reference frame and considering the lines of equations $r_1 : a_1x + b_1y = 0$ and $r_2 : a_2x + b_2y = 0$ with slope m_1 and m_2 respectively, that the slope m_b of the bisector $r_b : a_bx + b_by = 0$ identified by the two half-lines that are found in the half-plane with non-negative ordinates can be expressed through a relation involving m_1 and m_2 , namely $m_b = f(m_1, m_2)$. In the first part of this article we will only deal with lines that pass through the origin of a reference frame, subsequently we will deal with the equation of an angle bisector of a triangle identified by three lines of the Cartesian frame that do not form a proper bundle and are intersecting in pairs. In this context, the definition of an inversive ordered pair of lines will be introduced.*

Keywords: Arctangent, angle, angle bisector, slope

*Liceo Assteas, Buccino (SA), Italia; franco.fernicola@iisassteas.edu.it.

†Liceo Assteas, Buccino (SA), Italia; giovanni.forlenza@iisassteas.edu.it.

Sommario: *In questo articolo si dimostra, fissato un sistema di riferimento cartesiano monometrico ortogonale e considerate le rette di equazioni $r_1 : a_1x + b_1y = 0$ e $r_2 : a_2x + b_2y = 0$ con coefficiente angolari rispettivamente m_1 e m_2 , che il coefficiente angolare m_b della bisettrice $r_b : a_bx + b_by = 0$ individuata dalla due semirette che si trovano nel semipiano con ordinate non negative si potrà esprimere mediante una relazione che coinvolge m_1 e m_2 ovvero $m_b = f(m_1, m_2)$. Nella prima parte di questo articolo ci occuperemo soltanto di rette che passano per l'origine di un riferimento, successivamente tratteremo il coefficiente angolare della bisettrice dell'angolo di un triangolo individuato da tre rette del piano cartesiano che non formano fascio proprio e sono a due a due incidenti, in tale contesto sarà introdotta la definizione di coppia ordinata di rette inversiva.*

Parole chiave: Arcotangente, angolo, bisettrice, coefficiente angolare.

1 Introduzione

Prima di passare all'enunciato fulcro di tale articolo e alla relativa dimostrazione facciamo alcune precisazioni per inquadrare il problema. Su molti testi scolastici di scuola superiore è presente la relazione che permette di scrivere le equazioni delle bisettrici dei due angoli individuate dalle rette $r_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $r_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ scrivendo la seguente equazione:

$$r_{b_{1,2}} : \left| \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}x + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}y + \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \right| = \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}x + \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}y + \frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right|,$$

ovvero eludendo qualche calcolo:

$$r_{1,2} : \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \mp \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right) x + \left(\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \mp \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right) y + \left(\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \mp \frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right) = 0$$

già questa scrittura ci fa intuire quanto noioso sia determinare almeno uno dei due coefficienti angolari delle bisettrici degli angoli individuati dalle due rette r_1 e r_2 perché coinvolge espressioni che contengono più di qualche radicale. In questo articolo si metterà in evidenza una relazione funzione del determinante di una matrice di ordine 2 che fornisce con un semplice calcolo il coefficiente angolare delle due bisettrici a partire dai coefficienti angolari delle rette assegnate.

Osservazione 1.1. *Nel prossimo paragrafo quando parleremo di bisettrice di un angolo individuata da rette per l'origine ci riferiremo sempre alla bisettrice dell'angolo individuato dalle due semirette che si trovano nel semipiano delle ordinate non negative, di conseguenza anche tale bisettrice si troverà nel semipiano delle ordinate non negative.*

2 Coefficiente angolare della bisettrice

Non è per nulla limitativo determinare il coefficiente angolare di una bisettrice di due rette che passano per l'origine. Siano $r_1 : a_1x + b_1y = 0$ e $r_2 : a_2x + b_2y = 0$ due di tali rette, indichiamo con α_1 e α_2 i relativi angoli che esse formano con il semiasse positivo delle ascisse e con il solito verso positivo quello antiorario. Per noi sarà sempre $\alpha_1 > \alpha_2$, con $\alpha_1, \alpha_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ e infine $\tan(\alpha_1) = m_1$, $\tan(\alpha_2) = m_2$. I casi $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ o $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ saranno discussi a parte.

Richiamiamo alcune relazioni utili per il prosieguo:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ con } \alpha \neq k\pi \text{ e } k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (3)$$

Proposizione 2.1. *Siano assegnate le rette di equazioni $r_1 : a_1x + b_1y = 0$ e $r_2 : a_2x + b_2y = 0$ (figura 1) con rispettivi coefficienti angolari m_1 e m_2 , rispettivi angoli $\alpha_1 > \alpha_2$ riferiti al semiasse positivo delle ascisse. Se la coppia $(m_1, m_2) \neq (0, 0)$, la bisettrice di equazione $r_b : a_bx + b_by = 0$ individuata dalle precedenti rette ha coefficiente angolare m_b si ricava dalle seguenti relazioni:*

$$m_b = \begin{cases} \frac{\left| \begin{array}{cc} \sqrt{1+m_1^2} & m_2 \\ -m_1 & \sqrt{1+m_2^2} \end{array} \right| - 1}{m_1 + m_2} & m_1 > 0 \wedge m_2 \geq 0 \vee m_1 < 0 \wedge m_2 < 0 \\ \frac{\left| \begin{array}{cc} m_1 & \sqrt{1+m_2^2} \\ \sqrt{1+m_1^2} & m_2 \end{array} \right| - 1}{m_1 + m_2} & m_1 < 0 \wedge m_2 \geq 0 \\ m_1 - \sqrt{1+m_1^2} & m_1 < 0 \wedge m_2 = \infty \\ m_2 + \sqrt{1+m_2^2} & m_1 = \infty \wedge m_2 \geq 0 \\ \text{Non esiste} & m_1 = -m_2 \text{ con } m_2 > 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. (i) Analizziamo prima l'ultima parte della relazione precedente, sappiamo che $0 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$ e quindi $\tan(\alpha_2) = m_2 > 0$. Se $\alpha_1 = \pi - \alpha_2$, allora $\tan(\alpha_1) = \tan(\pi - \alpha_2) = -\tan(\alpha_2) =$

$-m_2 < 0$, quindi $m_1 = -m_2$. La bisettrice individuata dalle due rette sarà l'asse delle y di equazione $x = 0$ che non è dotata di coefficiente angolare. Per il prosieguo torneranno utili le seguenti formule riferite alle funzioni goniometriche inverse:

$$\begin{aligned}\cos(\arctan(x)) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \forall x \in \mathbb{R}; \\ \sin(\arctan(x)) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

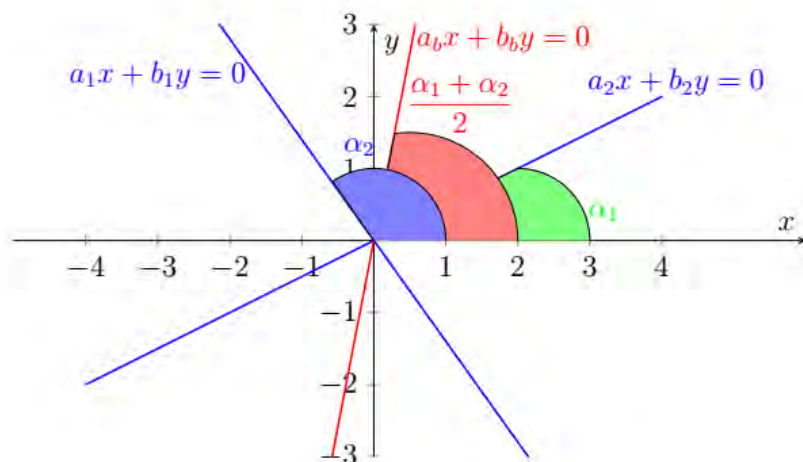


Fig. 1 - I grafici di due rette e la relativa bisettrice che forma un angolo $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$

(ii) Supponiamo che sia $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, intanto $\alpha_2 = \arctan(m_2)$ e quindi:

$$m_b = \tan\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \alpha_2}{2}\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2\right)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \arctan(m_2)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arctan(m_2)\right)} = \frac{1 + \sin(\arctan(m_2))}{\cos(\arctan(m_2))} = \\
 &= \frac{1 + \frac{m_2}{\sqrt{1+m_2^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+m_2^2}}} = m_2 + \sqrt{1+m_2^2}.
 \end{aligned}$$

In forma compatta:

$$m_b = m_2 + \sqrt{1+m_2^2}.$$

(iii) Supponiamo che sia $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, intanto $\alpha_1 = \arctan(m_1) + \pi$ e quindi:

$$\begin{aligned}
 m_b &= \tan\left(\frac{\alpha_1 + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = \frac{1 - \cos\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)} = \\
 &= \frac{1 - \cos\left(\arctan(m_1) + \pi + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\arctan(m_1) + \pi + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1 - \sin(\arctan(m_1))}{-\cos(\arctan(m_1))} = \\
 &= \frac{1 - \frac{m_1}{\sqrt{1+m_1^2}}}{-\frac{1}{\sqrt{1+m_1^2}}} = m_1 - \sqrt{1+m_1^2}.
 \end{aligned}$$

In forma compatta:

$$m_b = m_1 - \sqrt{1+m_1^2}.$$

(iv) Discussi i casi particolari da questo momento possiamo supporre $\alpha_1 \neq \pi - \alpha_2$ con $0 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$, con $\alpha_1 \neq \frac{\pi}{2}$ con $0 \leq \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \pi$ con $\alpha_2 \neq \frac{\pi}{2}$. Per determinare il coefficiente angolare

della bisettrice dell'angolo individuato dalle rette r_1 e r_2 non dobbiamo fare altro che calcolare $m_b = \tan\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$.

Distinguiamo tre casi a seconda del segno dei coefficienti angolari m_1 e m_2 .

I CASO: Coefficienti angolari il primo positivo e il secondo non negativo:

$$0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2} \text{ e } 0 \leq \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$$

Sia $\alpha_1 = \arctan(m_1)$ e $\alpha_2 = \arctan(m_2)$, per quello detto in precedenza:

$$\begin{aligned} m_b &= \tan\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \\ &= \frac{1 - [\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2)]}{\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_1)\sin(\alpha_2)} \end{aligned}$$

In forma compatta possiamo scrivere:

$$m_b = \frac{1 - [\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2)]}{\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_1)\sin(\alpha_2)}$$

Sappiamo che $\alpha_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\alpha_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Utilizziamo le seguenti formule per le funzioni goniometriche inverse:

$$\begin{aligned} \cos(\arctan(x)) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \forall x \in \mathbb{R}; \\ \sin(\arctan(x)) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Possiamo iniziare il calcolo, tenendo conto della relazione di m_b e delle relazioni appena scritte:

$$m_b = \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+m_2^2}} - \frac{m_1}{\sqrt{1+m_1^2}} \cdot \frac{m_2}{\sqrt{1+m_2^2}} \right)}{\left(\frac{m_1}{\sqrt{1+m_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+m_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+m_1^2}} \cdot \frac{m_2}{\sqrt{1+m_2^2}} \right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+m_1^2} \cdot \sqrt{1+m_2^2} + m_1 m_2 - 1}{m_1 + m_2}.$$

Questa relazione sul coefficiente angolare della bisettrice di un angolo si può scrivere mediante matrici quadrate di ordine 2:

$$m_b = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{1+m_1^2} & m_2 \\ -m_1 & \sqrt{1+m_2^2} \end{vmatrix} - 1}{m_1 + m_2}$$

Esempio 2.1. Verifichiamo la bontà della relazione considerando la retta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ che forma un angolo di 30° con il semiasse delle ascisse positive e la retta di equazione $y = \sqrt{3}x$ che forma un angolo di 60° con il semiasse delle ascisse positive. Ci aspettiamo che la bisettrice formi un angolo di 45° e quindi $m_b = 1$. Controlliamo se la relazione ci restituisce il valore indicato considerando $m_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $m_2 = \sqrt{3}$:

$$m_b = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{1+3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{1+\frac{1}{3}} \end{vmatrix} - 1}{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} - 1}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = 1$$

II CASO: Coefficienti angolari entrambi non positivi:

$$\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \pi \text{ e } \frac{\pi}{2} < \alpha_2 < \pi$$

Sia $\alpha_1 = \arctan(m_1) + \pi = \alpha'_1 + \pi$ e $\alpha_2 = \arctan(m_2) + \pi = \alpha'_2 + \pi$, per quello detto in precedenza:

$$\begin{aligned} m_b &= \tan\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \\ &= \frac{1 - [\cos(\alpha'_1) \cos(\alpha'_2) - \sin(\alpha'_1) \sin(\alpha'_2)]}{\sin(\alpha'_1) \cos(\alpha'_2) + \cos(\alpha'_1) \sin(\alpha'_2)}. \end{aligned}$$

In forma compatta possiamo scrivere:

$$m_b = \frac{1 - [\cos(\alpha'_1) \cos(\alpha'_2) - \sin(\alpha'_1) \sin(\alpha'_2)]}{\sin(\alpha'_1) \cos(\alpha'_2) + \cos(\alpha'_1) \sin(\alpha'_2)}$$

Sappiamo che $\alpha_1, \alpha_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Utilizziamo le seguenti formule per le funzioni goniometriche inverse:

$$\begin{aligned} \cos(\arctan(x)) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}; \\ \sin(\arctan(x)) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Possiamo iniziare il calcolo, tenendo conto della relazione di m_b e delle relazioni appena scritte e le relazioni sugli archi associati su angoli che differiscono di π radianti:

$$\begin{aligned} m_b &= \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+m_2^2}} - \frac{m_1}{\sqrt{1+m_1^2}} \cdot \frac{m_2}{\sqrt{1+m_2^2}} \right)}{\left(\frac{m_1}{\sqrt{1+m_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+m_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+m_1^2}} \cdot \frac{m_2}{\sqrt{1+m_2^2}} \right)} = \\ &= \frac{\sqrt{1+m_1^2} \cdot \sqrt{1+m_2^2} + m_1 m_2 - 1}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Questa relazione sul coefficiente angolare della bisettrice di un angolo si può scrivere mediante matrici quadrate di ordine 2:

$$m_b = \frac{\left| \begin{array}{cc} \sqrt{1+m_1^2} & m_2 \\ -m_1 & \sqrt{1+m_2^2} \end{array} \right| - 1}{m_1 + m_2}$$

Esempio 2.2. Verifichiamo la bontà della relazione considerando la retta $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ che forma un angolo di 150° con il semiasse delle ascisse positive e la retta di equazione $y = -\sqrt{3}x$ che forma un angolo di 120° con il semiasse delle ascisse positive. Ci aspettiamo che la bisettrice formi un angolo di 135° e quindi $m_b = -1$. Controlliamo se la relazione ci restituisce il valore indicato considerando $m_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $m_2 = -\sqrt{3}$:

$$m_b = \frac{\left| \begin{array}{cc} \sqrt{1+\frac{1}{3}} & -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \sqrt{1+3} \end{array} \right| - 1}{\frac{-\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}} = \frac{\left| \begin{array}{cc} \sqrt{\frac{4}{3}} & -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 2 \end{array} \right| - 1}{-\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}}}{-\frac{4\sqrt{3}}{3}} = -1$$

III CASO: Coefficienti angolari discordi ovvero il primo negativo e il secondo non negativo:

$$\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \pi \text{ e } 0 \leq \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$$

Sia $\alpha_1 = \arctan(m_1) + \pi = \alpha'_1 + \pi$ e $\alpha_2 = \arctan(m_2)$, per quello detto in precedenza:

$$m_b = \tan\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} =$$

$$= \frac{1 - [-\cos(\alpha'_1) \cos(\alpha_2) + \sin(\alpha'_1) \sin(\alpha_2)]}{-\sin(\alpha'_1) \cos(\alpha_2) - \cos(\alpha'_1) \sin(\alpha_2)}.$$

In forma compatta possiamo scrivere:

$$m_b = \frac{1 - [-\cos(\alpha'_1) \cos(\alpha_2) + \sin(\alpha'_1) \sin(\alpha_2)]}{-\sin(\alpha'_1) \cos(\alpha_2) - \cos(\alpha'_1) \sin(\alpha_2)}$$

Sappiamo che $\alpha_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ e $\alpha_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ora ci sono delle formule per le funzioni goniometriche inverse che sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \cos(\arctan(x)) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \forall x \in \mathbb{R}; \\ \sin(\arctan(x)) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Possiamo iniziare il calcolo, tenendo conto della relazione di m_b e delle relazioni appena scritte e le relazioni sugli archi associati su angoli che differiscono di π radianti:

$$\begin{aligned} m_b &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{1+m_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+m_2^2}} + \frac{m_1}{\sqrt{1+m_1^2}} \cdot \frac{m_2}{\sqrt{1+m_2^2}} \right)}{\left(-\frac{m_1}{\sqrt{1+m_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+m_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+m_1^2}} \cdot \frac{m_2}{\sqrt{1+m_2^2}} \right)} \\ m_b &= \frac{\sqrt{1+m_1^2} \cdot \sqrt{1+m_2^2} - m_1 m_2 + 1}{-m_1 - m_2} = \\ &= \frac{m_1 m_2 - \sqrt{1+m_1^2} \cdot \sqrt{1+m_2^2} - 1}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Questa relazione sul coefficiente angolare della bisettrice di un angolo si può scrivere mediante matrici quadrate di ordine 2:

$$m_b = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & \sqrt{1+m_2^2} \\ \sqrt{1+m_1^2} & m_2 \end{vmatrix} - 1}{m_1 + m_2}$$

Esempio 2.3. Verifichiamo la bontà della relazione considerando la retta $y = -\sqrt{3}x$ che forma un angolo di 120° con il semiasse delle ascisse positive e la retta di equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ che forma un angolo di 30° con il semiasse delle ascisse positive. Ci aspettiamo che la bisettrice formi un angolo di 75° e quindi $m_b = \sqrt{3} + 2$. Controlliamo se la relazione ci restituisce il valore indicato considerando $m_1 = -\sqrt{3}$ e $m_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$:

$$m_b = \frac{\left| \begin{array}{cc} -\sqrt{3} & \sqrt{1 + \frac{1}{3}} \\ \sqrt{1 + 3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right| - 1}{-\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\left| \begin{array}{cc} -\sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 2 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right| - 1}{\frac{-2\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{-2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}}{\frac{-2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} + 2$$

Per terminare con la rassegna degli esempi riportiamo anche situazioni che si riferiscono agli ultimi due casi contemplati nella relazione esposta nella proposizione:

Esempio 2.4. Consideriamo la retta $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ che forma un angolo di 150° con il semiasse delle ascisse positive e la retta di equazione $x = 0$ che forma un angolo di $\alpha_2 = 90^\circ$ con il semiasse delle ascisse positive. Ci aspettiamo che la bisettrice formi un angolo di 120° e quindi $m_b = -\sqrt{3}$. Controlliamo se la relazione ci restituisce il valore indicato considerando $m_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$:

$$\begin{aligned}
 m_b &= m_1 - \sqrt{1 + m_1^2} \Rightarrow m_b = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m_b = -\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Esempio 2.5. Verifichiamo la bontà della relazione considerando la retta $y = -\sqrt{3}x$ che forma un angolo di 120° con il semiasse delle ascisse positive e la retta di equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ che forma un angolo di 30° con il semiasse delle ascisse positive. Ci aspettiamo che la bisettrice formi un angolo di 75° e quindi $m_b = \sqrt{3} + 2$. Controlliamo se la relazione ci restituisce il valore indicato considerando $m_1 = -\sqrt{3}$ e $m_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$:

$$\begin{aligned}
 m_b &= \frac{\left| \begin{array}{cc} -\sqrt{3} & \sqrt{1 + \frac{1}{3}} \\ \sqrt{1 + 3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right| - 1}{-\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\left| \begin{array}{cc} -\sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 2 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right| - 1}{-\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \\
 &= \frac{-\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2}{-\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} + 2
 \end{aligned}$$

□

Le bisettrici di un triangolo

Fissato un sistema di riferimento monometrico ortogonale nel piano, consideriamo tre rette $\{r_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ che non formano un fascio proprio di rette e siano a due a due incidenti; in tal caso le tre rette individuano un triangolo i cui vertici li indichiamo con A_{ij} con $i < j$ e il punto A_{ij} si ottiene come intersezione tra la retta $r_i \cap r_j$ ovvero

$\{A_{ij}\} = r_i \cap r_j$. Nel prosieguo vogliamo prendere in considerazione coppie ordinate di rette e per tale motivo ci apprestiamo a descrivere il procedimento per operare tale scelta. Sappiamo che esiste un'unica circonferenza γ che ha centro nel circocentro C e opportuno raggio r che passa per i tre vertici del triangolo individuato dalle tre rette. Noi consideriamo un'altra circonferenza concentrica a γ con raggio $r + \epsilon$ con $\epsilon > 0$ e la indichiamo con γ' . La circonferenza γ' interseca ciascuna delle rette r_i in due punti, su tale circonferenza γ' fissiamo come verso di percorrenza quello antiorario. Un qualsiasi punto P che descrive la circonferenza γ' seguendo il verso antiorario intersecherà tali rette nelle coppie ordinate (r_2, r_1) , (r_3, r_2) e (r_1, r_3) . Possiamo dare la seguente:

Definizione 2.1. Una coppia ordinata di rette (r_i, r_j) si dice *inversiva* se $\alpha(r_i) > \alpha(r_j)$ ovvero l'angolo che r_i forma con il semiasse delle ascisse positive è maggiore dell'angolo formato da r_j ; in caso contrario la coppia (r_i, r_j) si dice *non inversiva*. Diremo *inversivo* un vertice del triangolo individuato da una coppia di rette inversiva.

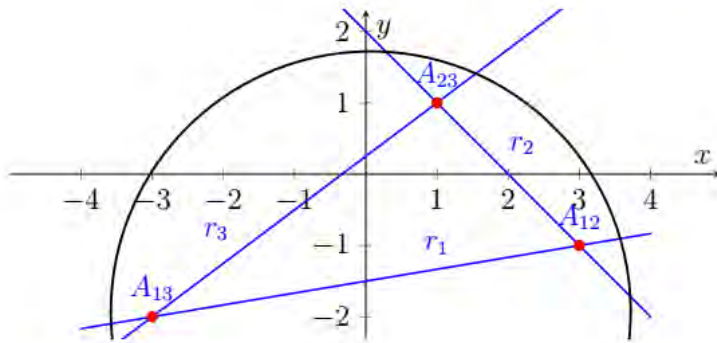


Fig. 2 - Triangolo individuato da tre rette che non formano un fascio proprio a due a due incidenti

Esempio 2.6. Il vertice A_{12} è *inversivo* (guardare la figura alla pagina successiva) in quanto determinato dalla coppia (r_2, r_1) che risulta *inversiva*. Il vertice A_{23} è *non inversivo* in quanto determinato dalla

coppia (r_3, r_2) che risulta non inversiva e infine il vertice A_{13} è non inversivo in quanto determinato dalla coppia (r_1, r_3) che risulta non inversiva.

Osservazione 2.1. Le bisettrici degli angoli interni al triangolo sono ortogonali alle bisettrici degli angoli esterni.

Proposizione 2.2. Sia A_{ij} un vertice di un triangolo con $i < j$ individuato dalle rette $r_i \cap r_j$. Se la coppia (r_i, r_j) non è inversiva, allora m_b si determina con le relazioni della Proposizione 1. Se il vertice A_{ij} è inversivo allora vale quanto segue:

a) $\alpha(r_i) > \alpha(r_j)$ con $m_i = -m_j$, allora $m_b = 0$.

b) $\alpha(r_i) > \alpha(r_j)$ con $m_i, m_j > 0$ oppure $m_i, m_j < 0$, allora:

$$m_b = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & \sqrt{1+m_2^2} \\ \sqrt{1+m_1^2} & m_2 \end{vmatrix} - 1}{m_1 + m_2}.$$

c) $\alpha(r_i) > \alpha(r_j)$ con $m_i \neq -m_j$, $m_i < 0$ e $m_j > 0$, allora:

$$m_b = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{1+m_1^2} & m_2 \\ -m_1 & \sqrt{1+m_2^2} \end{vmatrix} - 1}{m_1 + m_2}.$$

Dimostrazione. Se il vertice non è inversivo le equazioni delle rette r'_i e r'_j , determinano un angolo traslato con vertice nell'origine del riferimento e conservano lo stesso coefficiente angolare. Se il vertice è inversivo, allora l'angolo traslato è quello esterno al triangolo. Nel caso $m_i = -m_j$ la bisettrice è una retta verticale e di conseguenza la bisettrice dell'angolo del triangolo ammette retta orizzontale, $m = 0$ e vale **a)**. Nel caso $m_i \neq -m_j$, basta osservare quanto affermato

nella Proposizione 1 con $m_i, m_j > 0$ oppure $m_i, m_j < 0$ e vale b). Infine, se i coefficienti sono discordi con $m_i \neq -m_j$ e $m_i < 0$, $m_j > 0$ allora vale caso c). $\square$

Esempio 2.7. Le rette di equazioni $r_1 : x + y = 0$, $r_2 : x - 4y - 5 = 0$ e $r_3 : x + 6y - 5 = 0$ individuano un triangolo nel piano cartesiano. Determinare l'equazione della bisettrice dell'angolo formato dalle rette r_2 e r_3 .

La retta r_2 ha un coefficiente angolare $m_2 = \frac{1}{4}$ e la retta r_3 ha un coefficiente angolare $m_3 = -\frac{1}{6}$. Se uno segue il verso antiorario intercetta prima la retta r_3 e poi la retta r_2 e quindi il vertice A_{23} è inversivo, per calcolare il coefficiente angolare della bisettrice dobbiamo utilizzare la relazione:

$$r_b = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{1+m_1^2} & m_2 \\ -m_1 & \sqrt{1+m_2^2} \end{vmatrix} - 1}{m_1 + m_2} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{37}}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{17}}{4} \end{vmatrix} - 1}{\frac{2}{24}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{37} \cdot \sqrt{17}}{24} - \frac{1}{24} - 1}{\frac{2}{24}} = \frac{\sqrt{37} \cdot \sqrt{17} - 25}{2}.$$

Non è difficile verificare che le rette si intersecano nel punto $P \equiv (5, 0)$ e di conseguenza l'equazione della bisettrice è:

$$y = \frac{\sqrt{37} \cdot \sqrt{17} - 25}{2} (x - 5).$$

3 Ringraziamenti

Un ringraziamento all'attuale Dirigente Scolastica Prof.ssa Anna Rita Carrafiello, alla vicaria Prof.ssa Maria Cammardella, alla

DSGA Dott.ssa Nicoletta Agosto e allo staff dirigenziale del *Liceo Assteas di Buccino* per il costante supporto a ogni iniziativa volta a arricchire il nostro percorso formativo.

Un segno di riconoscenza e gratitudine è indirizzato alla Dirigente Scolastica Prof.ssa Marilena Viggiano: la sua capacità di valorizzarci e motivarci nel tempo è stata fondamentale, questi risultati sono in gran parte merito della sua guida iniziale.

4 Bibliografia

1. BETTUZZI Giancarlo (2002). "Il coefficiente angolare della retta." *Regressione lineare semplice. (Manuali & antologie)*; Bologna -Gennaio 2002- Editore CLUEB
2. MISSIROLI, Daniela (n.d.). *Le funzioni circolari nell'insegnamento secondario*. PhD Thesis.
3. PAOLILLO Bonaventura (2023). "Ricerca e prassi in Didattica della Matematica: il caso della Goniometria e Trigonometria." «*Periodico di Matematica*» (IV) Vol. V (4) dicembre 2023, pp. 93-118.
4. VERARDI Libero, BUTTAZZI Marusca (2003). *Le funzioni elementari. Istituzioni di matematiche: con laboratorio*; Bologna -2003- Editore CLUEB

Adelphi eBook

CARLO ROVELLI

*Sull'eguaglianza
di tutte le cose*

LEZIONI AMERICANE



ADELPHI

La polimatia (πολυμαθία) di Parmenide lo fa diventare scienziato?

Anna Amirante*

DOI:10.53159/PdM(V).v1n1.170

Ricevuto 1-04-2026 Accettato 10-04-2026 Pubblicato 30-04-2026



Abstract: *We are so accustomed to the idea of Aristotelian science that human knowledge of nature can and must take the form of an axiomaticdeductive system, where only what is proven is true, that we often do not recognize ourselves in quantum theory and relativity in which certainty does not exist. This is the philosophy of Parmenides, for whom opinions (δ'όξαι) , are deceptive, but they make us read reality. The idea of this in-depth study between philosophy, mathematics and physics, on the meaning of scientist in classicism and scientist in modern thought gave rise to the laboratory proposed to a class IV of Scientific High School, Mathematical High School and Complementary Mathematics I with an interdisciplinary Vygotskiano- Piagetian approach with laboratory activities.*

Keywords: Interdisciplinarity; scientist; logic

*Liceo La Mura, Angri (SA), Italia; aamirante@unisa.it.

Sommario: *Siamo così abituati all'idea di scienza aristotelica per cui la conoscenza umana della natura può e deve assumere la forma di un sistema assiomatico-deduttivo, dove è vero solo ciò che è dimostrato che spesso non ci riconosciamo nella teoria quantistica e nella relatività in cui non esiste la certezza. Questa è la filosofia di Parmenide, per il quale le opinioni (δ'όξα) , sono ingannevoli, ma ci fanno leggere la realtà. L'idea di questo approfondimento fra filosofia, matematica e fisica, sul significato di scienziato nella classicità e scienziato nel pensiero moderno ha dato vita al laboratorio proposto ad una classe IV di Liceo Scientifico, Liceo Matematico e a Matematica Complementare I con un approccio di tipo vygoskiano-piagetiano interdisciplinare con attività laboratoriali.*

Parole chiave: Interdisciplinarietà; scienziato; logica

1 Introduzione

Un polimata è una persona enciclopedica, come Aristotele o Leonardo da Vinci. Si è voluto dimostrare, partendo da passi tratti dal poema Sulla natura di Parmenide, quali fossero i suoi campi di indagine: filosofia e metafisica, ma anche cosmologia e scienze naturali (fisica), forse medicina, matematica e politica, per i contatti con i pitagorici e col medico Alcmeone. E, quindi, anche se non in senso stretto, si è potuto dire che anche Parmenide possa essere considerato un polimata. Invece, non è uno scienziato moderno perché non fa esperimenti, ma da filosofo usa un metodo razionale e deduttivo. Egli parte da un principio astratto "l'essere è, il non essere non è" e costruisce il suo sistema filosofico senza basarsi sull'esperienza sensibile, che anzi considera ingannevole. Non fa scienza in senso stretto, ma influenzerà la scienza dopo di lui: rompe la tradizione della filosofia naturalistica, basata su fenomeni sensibili e fisici, e col suo metodo razionalista usa un ragionamento logico e deduttivo da vero matematico, pur senza risolvere problemi numerici o geometrici.

2 Parmenide matematico

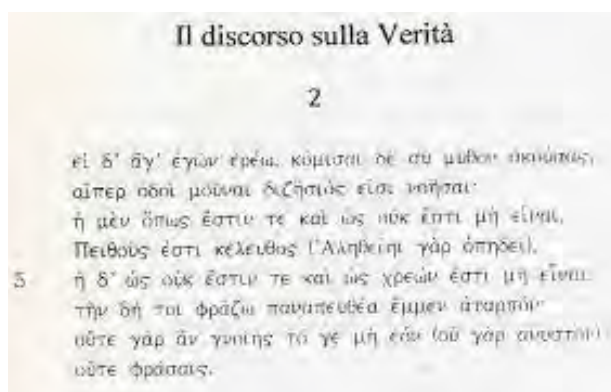
Parmenide è un matematico perché nel suo poema troviamo:

- Metodo deduttivo
 - Rifiuto del sensibile
 - Ricerca della verità immutabile
 - Struttura argomentativa, quasi assiomatica
- a. Parmenide parte dal principio fondamentale "l'essere è" e deduce tutto il resto, come il matematico parte da assiomi e costruisce teoremi per deduzione logica.



Fig. 1 Parmenide con sintesi del suo pensiero

Frammento 2: Traduzione: "ora ti dirò, e tu ascolta attenta-



mente il mio discorso, quali sono le uniche vie di ricerca che possono essere pensate: l'una (che dice) che è e che non è

possibile che non sia, è il sentiero della Persuasione (poiché questa segue la Verità); l'altra (che dice) che non è e che non sia possibile che sia, questa io dischiario che è un sentiero del tutto inindagabile: perché ciò che non è né lo puoi pensare (non è infatti possibile), né lo puoi esprimere".

Osservazione 2.1. : in questo passo Parmenide evidenzia le due possibili vie, una che conduce alla verità attraverso la ragione (la via della Persuasione), e l'altra che è inaccessibile e priva di fondamento. Questo approccio logico e deduttivo è simile al metodo matematico, che parte da assiomi e costruisce teoremi attraverso deduzioni rigorose. Infatti, Euclide nel Libro I grazie al: Postulato 1: si può tracciare una retta da un punto ad un altro;

Postulato 2: si può prolungare una retta finita indefinitivamente; Postulato 5: per un punto esterno a una retta, passa una sola parallela;

dimostra la Proposizione 29 (utilizzando questi tre postulati): una retta che taglia due rette parallele forma angoli alterni interni uguali e angoli corrispondenti uguali.

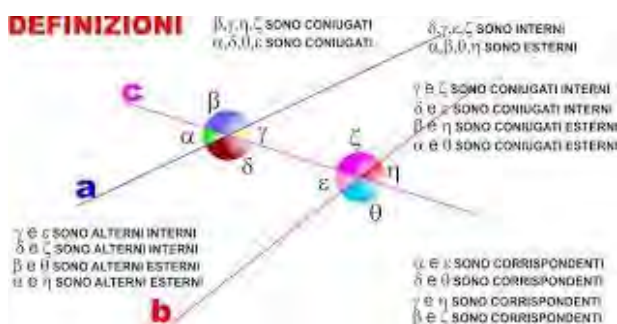
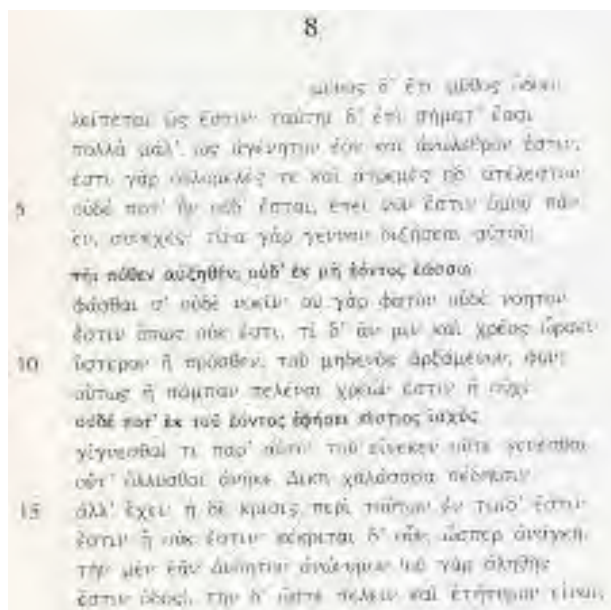


Fig. 2 schema degli angoli determinati da due rette parallele tagliate da una trasversale

- b. Parmenide distingue tra la via della verità e quella dell'opinione, mettendo in evidenza l'inganno dei sensi, come Platone



che distingue le figure sensibili, imperfette e le forme ideali, perfette, come il triangolo. Frammento 8 Traduzione: "rimane ora solo un discorso possibile: che l'essere è e su questa via ci sono molti segni (prove), che l'essere è ingenerato e imperituro, intero, unico, immobile e infinito. Non fu mai, né sarà: è ora, tutto insieme, uno, continuo. Quale origine cercheresti per esso? Come e da dove sarebbe nato? Non ti permetterò di dire che viene dal non essere, non si può dire né pensare: il non essere non si può né dire né pensare. E quale necessità l'avrebbe fatta nascere, prima o poi, nascendo dal nulla? Dunque, l'essere deve essere completamente oppure non è affatto, mai la forza della convinzione permetterà che qualcosa nasca dal non essere(anticipo del principio "ex nihilo nihil fit"= nulla nasce dal nulla), né la Giustizia ha lasciato che l'essere perisse, sciogliendolo dai suoi vincoli, ma lo trattiene; è o no è: è deciso, come è necessario, una via (quella del non essere) va lasciata:

è impensabile e senza nome (perché non è vera); l'altra è quella che afferma che l'essere è, ed è vera".

Osservazione 2.2. : *analogamente la verità matematica è non sensibile, immutabile, accessibile solo alla ragione. Se consideriamo la diagonale di un quadrato di lato $=1$, per il teorema di Pitagora la lunghezza vale $\sqrt{2}$, che è un numero irrazionale, non visibile da nessun righello (i sensi non lo colgono), ma solo la ragione lo comprende (con una dimostrazione astratta).*

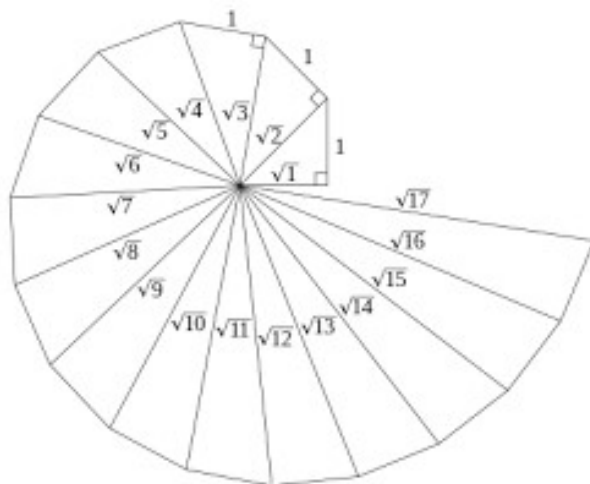


Fig. 3 sequenza di numeri irrazionali utilizzando il teorema di Pitagora

- c. Per Parmenide l'essere è immutabile, eterno ed uno, come tanti concetti in matematica eterni ed immutabili

Οὐδέ ποτ' ἦν οὐδέ ἐσται, ἐπεὶ νῦν ἐστὶν ὁμοῦ πάν, ἐν συνεχές
Traduzione: "non fu mai, né sarà: è ora, tutto insieme, uno, continuo"

Osservazione 2.3. : *Parmenide afferma che l'Essere è eterno, non è nato né morirà, è sempre uguale a se stesso, è unico ed indivisibile, non dipende dal tempo. Così in matematica alcuni concetti hanno questa proprietà: $2+2=4$ è sempre vero (ora oggi come 3000 anni fa) Il teorema di Pitagora vale in ogni*

tempo e luogo Esistono infiniti numeri primi (dimostrazione di Euclide per assurdo)

Teorema 1 (Teorema dell'infinità dei numeri primi)

L'insieme Π dei numeri primi è infinito numerabile.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo:

$$\Pi = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

Definiamo:

$$p_n = 1 + \prod_{k=1}^n p_k \Rightarrow p_n > p_k, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Quindi

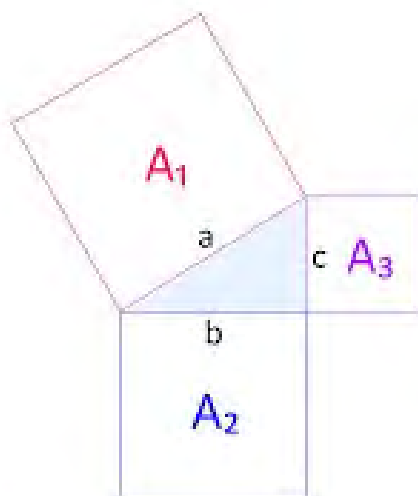
$$\frac{p_n}{p_k} = \frac{1}{p_k} + \prod_{k=1}^n p_k$$

Fig. 4 teorema di Euclide sull'infinità dei numeri primi



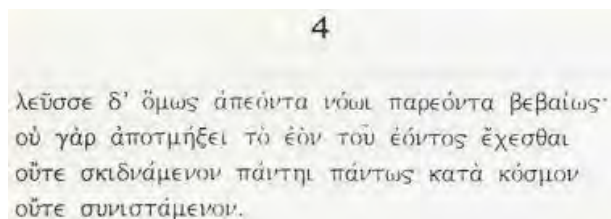
Fig. 5 regole aritmetiche

- d. Parmenide afferma l'identità dell'essere ed usa una struttura logico-deduttiva che anticipa il metodo assiomatico della matematica Frammento 4 Traduzione: "Guarda come cose lonta-



$$A_1 = A_2 + A_3$$

Fig. 6 il teorema di Pitagora



ne sono saldamente presenti alla mente: non infatti separerà l'essere che si tiene stretto all'essere né [quando appare] disperso da per tutto completamente nel cosmo né [quando si mostra] riunito insieme" ... Rifletti come cose, anche lontane tra loro e da te nello spazio e nel tempo (persone e cose lontane, persone morte ma vive nel ricordo), siano saldamente presenti alla tua mente: infatti la mente ha attività unificatrice, non divide in parti l'essere né quando esso appare disperso nel cosmo (astri, pianeti, persone lontane, persone morte, ecc.) né

quando è riunito in un unico ente..."

Osservazione 2.4. : questa visione dell'essere come unitario e immutabile si contrappone alla concezione del divenire e della molteplicità, come alcuni concetti in matematica (la continuità di una funzione, la proprietà riflessiva: $A=A$, un numero primo non può essere diviso)



Fig. 7 grafico funzione continua e discontinua

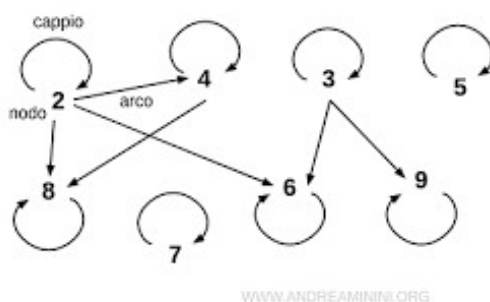


Fig. 8 schema proprietà riflessiva

Frammento 2 εἰ δ' ἄγε, τῶν ἐρέω, κόμισαι δὲ σὺ μῦθον ἀχο-
ύσας, αἵπερ ὁδοὶ μοῦναι διζήσιός εἰσι νοῆσαι· ἡ μὲν, ὅπως



Fig. 9 definizione numero primo

ἐστὶν τε καὶ ὥς οὐκ ἔστι μὴ εἶναι, πειθοῦς ἐστὶ κέλευθος, ἀληθείη γὰρ ὀπηδεῖ, ἥ δ' , ὥς οὐκ ἔστιν τε καὶ ὥς χρεὼν ἐστὶ μὴ εἶναι, τὴν δὴ τοι φράζω παναπευθέα ἔμμεν ἀταρπόν· οὔτε γὰρ ἂν γνοίης τό γε μὴ εἶναι, οὐ γὰρ ἀνυστόν, οὔτε φράσαις. Traduzione: "Ma ora, dimmi, considera bene il discorso che ti presenterò, che queste sono le sole vie di ricerca da seguire: una, che l'essere è, e che non è possibile che non sia, è la via della persuasione, poiché essa segue la verità; l'altra che l'essere non è, e che non è necessario che non sia, questa io vi dico che è una via completamente impraticabile; poiché tu non potresti conoscere ciò che non è, poiché non è possibile, né esprimerlo".

Osservazione 2.5. : *è possibile confrontarlo con un testo matematico (Libro I di Euclide):*

3 Parmenide fisico

Parmenide non è un fisico nel senso moderno, ma può essere considerato un proto-fisico, filosofo della natura, perché tratta temi come il tempo, il movimento e il vuoto.

3.1 Il tempo

Se "l'essere è, e non può non essere. Il non essere non è, e non può essere", quindi l'essere non nasce, non muore, non cambia, è eterno e immutabile e quindi il tempo è un'illusione. Il tempo appartiene alla percezione, non è una proprietà dell'essere: solo il presente è eterno, unica dimensione reale.

Osservazione 3.1. : *quest'idea ricorda il modello a blocco dell'universo nella relatività di Einstein, in cui presente, passato e futuro coesistono nel tessuto spazio-temporale; la ragione contro la percezione.*



Fig. 10 Parmenide ed il tempo

3.2 Il movimento

Se l'essere è immutabile non può muoversi o trasformarsi, perché è "inalterabile, immutabile, senza fine, è tutto intero, simile ad una massa compatta. Non è né più qui né meno là, ma è tutto pieno di ciò che è"; quindi anche il movimento è un'illusione, perché il movimento implica il passaggio dall'essere al non essere che non è. Parmenide, in questo, è un precursore di Zenone con i suoi paradossi del movimento, e del determinismo dell'universo: Parmenide si può considerare come colui che anticipa il pensiero teorico del movimento come problema filosofico e logico, cioè su cosa significhi muoversi.



Fig. 11 Parmenide e il movimento

Osservazione 3.2. : *il movimento implica imperfezione, incompletezza e mancanza, perché presuppone un prima e un dopo, una pluralità che appartiene al non essere che non è. Tutto ciò stimolerà lo sviluppo della Logica (Zenone e i paradossi), della matematica e della fisica moderna.*

3.3 Il vuoto

Parmenide nega l'esistenza del vuoto perché il vuoto è uno spazio dove l'essere non è, e allora il vuoto è non essere, ma il non essere non esiste e quindi il vuoto non esiste.

Osservazione 3.3. : *per Parmenide il vuoto è un errore del pensiero e dei sensi; per Democrito il vuoto diventa necessario per il movimento degli atomi, anche se è ciò che non è, mentre per Aristotele non esisterà, ma perché la natura ne ha orrore (horror vacui).*



Fig. 12 l'universo ed il vuoto

4 Obiettivi

Parmenide può, così, rappresentare un'idea didattica interdisciplinare fra matematica, filosofia, letteratura(greca), matematica e fisica con gli Obiettivi didattici:

- Comprendere il pensiero di Parmenide.
- Collegare la struttura del suo ragionamento al metodo assiomatico della matematica.
- Riflettere sul rapporto fra ragione e percezione, come filosofia contro scienza.
- Analizzare il linguaggio poetico come mezzo di trasmissione di concetti astratti.
- Dedurre le "novità" del suo pensiero.

Obiettivi trasversali:

- Sviluppo del pensiero critico ed argomentativo.
- Educazione alla complessità (il problema del tempo, del movimento e del vuoto; i sensi contro la ragione).
- Consapevolezza del linguaggio (analisi dei diversi registri linguistici).

- Competenza logica ed argomentativa.
- Sviluppo dell'autonomia intellettuale (confronto con altri autori, filosofi, matematici, fisici).

5 Attività

Le attività proposte possono essere varie e diverse, a seconda della tipologia della classe e dell'indirizzo: da una mappa concettuale interdisciplinare partendo delle parole chiave (essere, tempo, movimento...) ad un debate (mondo dei sensi contro mondo razionale). Da un laboratorio logico (costruzione del pensiero di Parmenide attraverso lo schema euclideo), ad un laboratorio di scrittura creativa con un componimento poetico che si ispiri a una delle idee di Parmenide. Sarà possibile, quindi, una valutazione con un questionario interdisciplinare, con griglie di osservazione sulle attività svolte e sulla partecipazione alle discussioni e un elaborato individuale libero finale.

6 Conclusioni

Qualsiasi scoperta scientifica implica sempre il superamento di idee radicate. La luce solare si oppone a quella lunare, ma non è altro che una rappresentazione di uno stesso concetto (la luna è uguale al sole: infatti ne è illuminata). Oppure l'uguaglianza di due qualsiasi triangoli se hanno uguali un lato e due angoli adiacenti, o la somma degli angoli interni di un qualsiasi triangolo uguale a due angoli retti, rispetto ad uno equiangolo che non è isoscele. Per Parmenide, quindi, capire ed essere diventano la stessa cosa; si può dire che equivalenza è uguaglianza, identità; molteplicità è rappresentazione di unità; la diversità è solo un'illusione: la più grande saggezza! Pertanto, lo studio del pensiero parmenideo insegna a non accettare l'apparenza, ama cercare la verità attraverso la razionalità, servendosi di argomentazioni logiche, chiedendosi ciò che è vero e giusto: un messaggio di cittadinanza che invita ad una responsabilità intellettuale importante e fondamentale in una società complessa e liquida.

Anche gran parte dell'arte contemporanea può essere descritta come una teoria di tentativi di interpretare la realtà

fenomenica, nelle sue varie accezioni politiche, culturali, sociali, antropologiche. Essa è, in definitiva, connessa alla percezione del cambiamento, soprattutto nell'epoca odierna, contraddistinta da una mobilità rapida delle strutture sociali e politiche, delle tecnologie, delle abitudini comportamentali. Con Bauman, sociologo della società liquida, il divenire illusorio di Parmenide non è altro che l'espressione della globalizzazione e del consumismo, della rapida obsolescenza dei sistemi produttivi e tecnologici, che portano allo smantellamento delle certezze e alla formazione di uno stato di paura diffusa. La paura liquida induce, forse indirettamente, allora, gli artisti a ragionare sui fenomeni di variazione, a interrogarsi sulla natura instabile della realtà, percepita come il campo d'azione e di prova delle speculazioni correnti. In conclusione, si può dire che Parme-



Fig. 13 D. Black: cosa stai guardando?



Fig. 14 S. Dalí: la persistenza della memoria

nide sia il precursore della scienza teorica e un esempio di pensiero critico interdisciplinare che permette una riflessione rispetto alla necessità di stabilità, unità e razionalità, quando intorno tutto ci appare confuso: l'essere è, e il non essere non è.

7 Bibliografia

1. Abbagnano N., Fornero G. (1999). *Protagonisti e testi di filosofia*. Paravia.
2. Bauman Z. (2011). *Modernità liquida*. Laterza.

3. Calogero G. (2012). *Storia della logica antica*.ETS.
4. Cerri G. (1999). *Parmenide di Elea, Poema sulla natura. Introduzione, testo, traduzione e note*. testo greco a fronte, Milano.
5. Dettori E. (2001). *La scienza di Parmenide*. Giornale Italiano di Filologia L.
6. Parmenide (2001). *Sulla natura*.Testo greco a fronte, a cura di Giovanni Reale, Bompiani.
7. Tortoriello F.S. e Nigrelli A. (2025). *Il Liceo Matematico*. Minesis

Profili biografici degli autori

Anna Amirante (Salerno) - aamirante@unisa.it.

Laureata in Matematica presso l'Università Federico II di Napoli, Anna Amirante ha consolidato una lunga esperienza come docente di ruolo nella scuola secondaria, attualmente in servizio presso il Liceo "Don Carlo La Mura" di Angri. Ha arricchito la sua formazione post-laurea conseguendo due master, tra cui quello in "Matematica tra le due culture", approfondendo temi legati alla didattica e all'interdisciplinarietà. Nel 2025 ha conseguito il Dottorato di Ricerca in Matematica presso l'Università di Salerno. Il suo profilo coniuga la prassi scolastica con la ricerca accademica: ricopre incarichi di docenza universitaria presso l'Università del Molise e attività di tutorato e coordinamento presso l'Università di Salerno. È attivamente impegnata nella divulgazione scientifica e nella formazione docenti, partecipando come relatrice a convegni nazionali (UMI-CIIM, AIRDM) e organizzando laboratori didattici nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche (PLS). Le sue pubblicazioni recenti esplorano i legami tra la matematica e le discipline umanistiche, dalla filosofia all'arte, proponendo nuovi approcci per l'insegnamento nel Liceo Matematico.

Giuseppe D'Angelo - sitdang010762@gmail.com

Laureato in Scienze Agrarie, ha conseguito l'abilitazione all'esercizio professionale di Agronomo e l'abilitazione all'insegnamento in Scienze Naturali. Docente a tempo indeterminato presso il liceo Scientifico Statale "Leonardo" di Giarre (CT). Ha collaborato saltuariamente con la rivista scientifica «Coelum Astronomia», nella quale ha pubblicato recentemente l'articolo *Il paradosso di olbers: un metodo per conoscere il numero di*

stelle che popolano l'universo, e con il «Periodico di Matematica» con l'articolo: *Se le calotte polari si sciolgono.....*. È autore di varie pubblicazioni su diverse altre riviste («La Chimica nella Scuola», «La tecnica della Scuola», «Linx Magazine») e del saggio *Lo Spazio Polisimmetrico* – prima edizione Ed. Book Sprint (cod ISBN 978-88-6823-1729). È autore di varie pubblicazioni su diverse altre riviste («La Chimica nella Scuola», «La tecnica della Scuola», «Linx Magazine», «ArteScienza», «La Ricerca») e di alcuni saggi.

Franco Fernicola – franco.fernicola@iisassteas.edu.it.

Consegue la laurea in matematica Indirizzo Generale con lode presso il Dipartimento di Matematica "R. Caccioppoli" dell'Università degli Studi "Federico II" di Napoli. La tesi si focalizza su alcune questioni relative alle Geometrie Finite e al suo interno vengono proposte dimostrazioni originali di alcuni teoremi riguardanti gli spazi lineari finiti (Teorema di Erdos, Teorema di Bridges, Teorema di de Witte) racchiusi in un articolo di circa 40 pagine pubblicate sotto forma di Preprint dal Dipartimento di Matematica "R. Caccioppoli" di Napoli. Per diversi anni svolge attività didattica per il corso di Geometria e Algebra presso la Facoltà di Ingegneria di Napoli, la Seconda Università degli studi di Napoli e il Consorzio Nettuno del Polo Tecnologico di Napoli. La sua formazione è stata influenzata dalla partecipazione a diverse Scuole di Geometria Combinatoria che si sono tenute in Italia (Gaeta, Napoli, Brescia, Potenza, Ascea Marina, Telese Terme), partecipazione a convegni sulle Geometrie Finite che si sono tenuti a Roma e ad Arco (Trento), altri seminari che si sono tenuti all'estero in Belgio presso l'Università di Ghent, di Bruxelles e l'Università di Malta. Per diversi anni alterna l'attività didattica tra scuole superiori e università, nel 2014 si trasferisce a Modena dove inizialmente insegna matematica nella scuola secondaria superiore e in seguito è ammesso alla scuola di Dottorato in Matematica presso la stessa Università di Modena

conseguendo il PhD in Matematica con una tesi riguardante questioni di decomposizioni in Teoria dei Grafi. Attualmente è docente di matematica presso il Liceo Scientifico Assteas di Buccino. Cura il sito web www.notedimatematica.it, con l'intento di coinvolgere gli studenti nello studio della matematica, cercando di condividere con loro la curiosità della ricerca matematica da sviluppare nei successivi studi universitari.

Giovanni Forlenza - giovanni.forlenza@iisassteas.edu.it.

È uno studente che frequenta la classe 4A del Liceo Scientifico ASSTEAS di Buccino (SA). Nel 2023 e nel 2026 ha tenuto delle comunicazioni al Convegno "Studenti in cattedra, docenti nell'ambito del Premio Morelli." Nel maggio 2024 ha partecipato alla fase finale dei Giochi Matematici del Mediterraneo che si è tenuta a Palermo. Nel maggio 2026 ha tenuto una comunicazione al Convegno MatEleatica.

Paolo Severino Manca - paolo.manca.spas@alice.it.

Già professore ordinario di Matematica Finanziaria all'Università di Pisa e direttore del Master in Mercati Finanziari dell'Università di Pisa e Fondazione Casse di Risparmio. Di recente ha scritto *Te la do io la probabilità* (Goware editore) e *Il giallo del teorema dei quattro colori* (ETS editore). Attualmente si occupa di teologia e ha pubblicato con successo *Ma Dio c'è?* (Goware editore). Nel passato ha esercitato anche la professione di maestro di sci. Come tenore e romanziere si presenta come Paolo Severino Nonchè (vedi YouTube e Amazon).

Pietro Velonà (Reggio Calabria) - pvelona74@gmail.com.

Ha conseguito la laurea in Ingegneria Civile e il Dottorato in Ingegneria dei Trasporti presso l'Università Mediterranea di Reggio

Calabria, occupandosi dell'analisi dei modelli di processo deterministico per la simulazione dell'assegnazione dei flussi di traffico alle reti di trasporto. È autore di oltre quaranta articoli e coautore con il Prof. Giulio Erberto Cantarella, ordinario di Sistemi di Trasporto presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Salerno, di due libri: *Assegnazione a reti di trasporto, Modelli di punto fisso* (2010) e *Assegnazione a reti di trasporto, Modelli di processo deterministico* (2020). Possiede l'abilitazione all'insegnamento nella scuola secondaria di secondo grado per la classe di concorso A027 (Matematica e Fisica). Insegna presso l'IIS "P. Mazzone" di Roccella Jonica (RC). Anche in ambito scolastico, coltiva la passione per lo studio e la ricerca e, per diffondere l'interesse per le proprie discipline, ha scritto, da solo e con altri autori, diversi volumi: *Matematica tra verità e bellezza* (2012), *Approfondimenti teorici di funzioni matematiche* (2013), *Per un pugno di Fisica* (2014), *Approfondimenti teorici di cinematica* (2016), *C'era una volta...la Relatività Ristretta* (2017), *Ritorno alla Relatività Ristretta* (2019), *Ricerche di fisica* (2022). Inoltre, ha pubblicato due articoli sul Giornale di Fisica: *Una nuova idea di laboratorio per capire la relatività ristretta* (2019), *Analisi di un fenomeno in sistemi di riferimento non solidali* (2021).