

Periodico di Matematiche



Organo della
MATHESIS
Società italiana di scienze
matematiche e fisiche
fondata nel 1895

Volume 101 (2025)
Fascicolo 1

Direttore

Salvatore Cuomo

salvatore.cuomo@unina.it

Comitato di Redazione

Maria Coccozza

mariacoccozza@lscortese.com

Atalia Del Bene

ataliadelbene1960@gmail.com

Umberto Dello Iacono

umberto.delloiacono@unicampania.it

Domenica Di Sorbo

presidente-disorbo@mathesisnazionale.it

Lorenzo Mazza

lorenzomazza@gmail.com

Marcello Pedone

marcellopedone@tin.it

Alessio Russo

alessio.russo@unicampania.it

Annalisa Santini

annalisasantini66@gmail.com

Francesco Sicolo

frsicolo@gmail.com

Autorizzazioni e supporti Autorizzazioni Tribunale di Bologna n. 266 del 29-3-1950

Il Periodico di Matematiche è distribuito gratuitamente ai soci Mathesis. Le istruzioni per associarsi su www.mathesisnazionale.it

Abbonamenti per Scuole ed Enti Vari: Per l'Italia €60,00 - Per l'Estero €70,00

Per richiesta di numeri singoli o arretrati: segreteria@mathesisnazionale.it

c/c postale, Codice IBAN:

IT05I0760104000000048597470

intestato a:

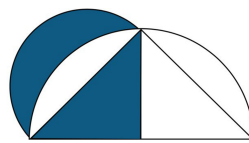
Mathesis Nazionale c/o Dipartimento di Matematica e Fisica
Università degli Studi della Campania "Luigi Vanvitelli"
Viale Abramo Lincoln 5 - 81100 Caserta (CE)
www.mathesisnazionale.it • info@mathesisnazionale.it

Fascicolo 1 Volume **101** (2025)

Periodico di Matematiche

Organo della MATHESIS

*Società italiana di scienze
fisiche e matematiche
fondata nel 1895*



Mathesis

Indice

Salvatore Cuomo	
Editoriale	i
Alessio Russo e Bruno Carbonaro	
Matematica, educazione, libertà e responsabilità	1
Nicola Fusco	
HEGEL e le Catastrofi	13
Sergio Saverino	
Le curve e lo spazio	39
Italo Testa	
Migliorare l'alfabetizzazione scientifica e le competenze di laboratorio degli studenti delle scuole secondarie: venti anni del Piano Lauree scientifiche	43
Claudia Meo	
Cenni alla teoria dei matching	61
F. Dell'Orto, F. Fernicola e M. Parisi	
Ortocentro, circocentro, baricentro e retta di Eulero	77

Editoriale

Il fascino della matematica risiede nella sua capacità di connettere mondi apparentemente distanti: la libertà creativa e il rigore logico, la filosofia e la scienza applicata, la riflessione educativa e la modellizzazione dei fenomeni complessi. I contributi raccolti in questo numero del Periodico di Matematiche offrono una testimonianza vivida di questa ricchezza.

Si apre con una riflessione sul ruolo educativo della matematica, che non si limita a fornire strumenti tecnici ma diventa pratica di libertà e responsabilità, capace di formare il pensiero critico e la coscienza civile. Segue un dialogo inedito tra filosofia e matematica: i concetti hegeliani di qualità e quantità trovano una sorprendente formalizzazione nella Teoria delle Catastrofi, mostrando come il pensiero matematico sappia dar forma anche alle più sottili intuizioni filosofiche.

Non mancano incursioni nel mondo delle curve matematiche, che da sempre strutturano lo spazio e ispirano l'astronomia, e un bilancio del Piano Lauree Scientifiche, che da vent'anni rappresenta un presidio fondamentale per avvicinare le nuove generazioni alle discipline scientifiche attraverso esperienze laboratoriali.

Un altro contributo ci guida nella teoria dei matching, dove la matematica si intreccia con l'economia e le scienze sociali per risolvere problemi di abbinamento ottimali che spaziano dall'assegnazione dei corsi universitari ai trapianti d'organo. Infine, viene proposta una trattazione elegante delle relazioni che determinano baricentro, ortocentro e circocentro di un triangolo, culminando in una dimostrazione puramente algebrica della celebre retta di Eulero.

Questo numero, eterogeneo e stimolante, invita il lettore a lasciarsi sorprendere dalla matematica, a esplorarne le connessioni e a coglierne il potere trasformativo nel pensiero e nella società.

Napoli, 15/08/2025

Salvatore Cuomo

Matematica, educazione, libertà e responsabilità

Mathematics, education, freedom and responsibility

Alessio Russo¹ e Bruno Carbonaro²

Abstract

The aim of the present paper is to discuss the diffused misunderstanding and misrecognition that mathematics, as expression of human thought, has to undergo — in spite of the great esteem it enjoyed among the Greeks, who really started it as a theoretical activity — from the beginning of the Christian era until today, rather surprisingly for opposite reasons. The paper argues that mathematics plays a fundamental rôle in the education of growing members of human society (provided the concept of education is correctly understood): in fact, some aspects of mathematics can get any person used to being free, and some other aspects can get the same person to be responsible; actually, the practice of mathematics consists of two different activities, the former in which imagination can fly high and free, the latter which obliges the mathematician to communicate as clearly, honestly and completely as possible. So, we are led to acknowledge that the practice of mathematics at a sufficiently high level can be described in its social aspect as «education to freedom and responsibility».

Introduction

The question about the rôle of mathematics in human knowledge and in human skills is almost as old as mathematics itself. After practical mathematical knowledge was imported, absorbed, elaborated by Greek philosophers looking for logical tools that could enable them to construct an organic picture of the world of experience; after Plato, evidently fascinated by the clarity of geometric reasoning, had sculpted on the entrance to his Academy the famous warning «μηδείς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω» («no one may enter unaware of geometry»); after the great flowering of theoretical mathematical studies in the Hellenistic period, the rising of first rather fanatic christian institutions³ revoked mathematical theoretical research in the condition of almost diabolical

¹alessio.russo@unicampania.it

²bruno.carbonaro@unicampania.it

³Recall, for instance, the lynching of Hypatia.

activity. In this connection, M. KLINE [14] reports that St. Augustine wrote: «The good Christian should beware of mathematicians and all those who make empty prophecies. The danger already exists that the mathematicians have made a covenant with the devil to darken the spirit and to confine man in the bonds of Hell. (*Quapropter bono christiano, sive mathematici, sive quilibet impie divinantium, maxime dicentes vera, cavendi sunt, ne consortio daemoniorum animam deceptam, pacto quodam societatis irretiant* ⁴».

And although this is a misinterpretation, because the word «mathematici» in the quoted text meant «astrologers», nevertheless the slip of meaning of the word through the first centuries of christian era, described by St. Augustine himself in *Adversus mathematicos* [16] , would deserve to be discussed. As a matter of fact, the following rule: «concerning evil-doers, mathematicians, and the like, [...] to learn the art of geometry and to take part in public exercises, an art as damnable as mathematics, are forbidden» [14] at least suggests that geometry was considered as a tool of astrologers. And throughout all the following centuries, from the Middle Age to the present day, an ever deeper furrow was excavated between two very different ways of considering mathematics. The former focuses on mathematical (specially arithmetic and geometric) techniques to solve practical problems (we could refer to this perspective as to «the shopkeeper's conception»⁵); according to this view, mathematics can be tolerated to the extent that it can be of some help to build solid homes and efficient cars, and to avoid being duped by suppliers and banks⁶). The latter focuses instead on the aesthetic pleasure given by mathematics to mathematicians [19, 21] , conceived however as people who love to solve puzzle games (we could refer to this perspective as to «the aesthete's conception»⁷).

Of course, beyond any ironic label, we must acknowledge that *any* intellectual activity can be viewed in these two ways: on one hand, from a purely *pragmatic* viewpoint, in connection with its effects on everyday's life; on the other hand, simply in connection with the pleasure it delivers to those who practice it. In this perspective, mathematics is not an exception, or rather we should ask ourselves why mathematics should be such. Still, a subtle but deep difference can be actually found between mathematics and any other intellectual activity.

Leaving aside those activities that are usually named arts (such as painting, poetry, music, and so on), whose pragmatic relevance is just expressed by the extent to which their aesthetic value is shared by the crowd of possible audiences, we can still observe that, for any other intellectual activity among the ones which aim at the development

⁴From *De Genesi ad Litteram* (see [16]))

⁵It was according to this conception that Herodotus interpreted the birth of mathematics in Egypt (see [3, 15]) .

⁶Not without a hint of contempt, however: still in nineteenth century, the philosopher Schopenhauer «described arithmetics as the lowest activity of the spirit, as is shown by the fact that it can be performed by a machine» [14] ; and less than a century ago, the Italian philosopher Croce denied to mathematics any knowledge content and the Italian philosopher Gentile stated that «[mathematics] is dead, infertile, arid like a stone» [10]

⁷It is according to this conception that Aristotle interpreted the birth of mathematics in Egypt [3,15] , at least if we ascribe a sort of aesthetic pleasure to religious rites and to the building of magnificent temples.

of human knowledge of the world, the pragmatic and aesthetic aspects are somehow strictly connected, even intertwined. A biologist or a chemist or a physicist can work only to satisfy their intellectual curiosity, to discover more features of natural phenomena in their particular field of interest. Nevertheless the results of their work will fall at once in the hands of technologists, who will use them in order to produce «technological tools» to solve practical problems or to modify the world in any way one could desire. As a consequence anyone, even not sharing their taste for the work needed to reach the result, can value what they have found. The way from any new theoretical discovery in chemistry, or physics, or biology, and its applications to our everyday's life (in the production of new light, resistant and economic materials, or of new powerful electronic tools for entertainment or nuclear diagnostics, or in our fight against viruses and bacteria) seems to be straight and reasonably short, so a chemist, a physicist or a biologist will be always admired by a large audience, even unaware of the real contents of their work.

To the contrary, mathematics is *hidden* in almost all of its applications, even to the eyes of people not deprived of some scientific preparation, like biologists, physicians, natural scientists and so on: as pointed out in many discussions about the popularization of mathematics, how many people know that RSA cryptographic system, which allows us to use our credit cards on-line keeping their data safe, is based on the so-called Fermat's Little Theorem, a result of Number Theory, the purest part of pure mathematics? Apart from the engineers, who is aware of the great amount of mathematics needed to produce safe buildings or efficient engines? Who knows that aircrafts could have never reached their present high degree of perfection without the invention of complex numbers, which to most students seem to be only crazy fantasies of «sorcerer's apprentices»? In the public perception, there seems to be much more mathematics than needed for any practical purpose.

As a consequence, those who love the logical challenges of mathematical problems and mathematical games, tackle them just as useless entertainments, while from a purely pragmatic viewpoint most people know little mathematics and look at it as a catalog of useful but obscure rules. Thus, they are in general mainly worried about their capability to apply correctly these rules (H. Gardner, 1991), rather than about any understanding of their origin.

The main aim of the present paper is to argue that this is a pitiful condition, not for mathematics itself, nor for mathematicians, but for mankind as a whole, because it will unavoidably lead to an impoverishment of human intellectual power. To let this conception of mathematics continue to be widespread among people of average culture would mean, on one hand, to lower the level of this so-called «average culture», on the other hand to let the uncritical vision of the world diffused by social networks weaken the logical faculties of individuals more than it has already done. In this connection, we shall try to suggest a different, deeper way to consider mathematics, which will also be more effective from a pragmatic viewpoint.

The pragmatics of education

As pointed out in the previous Section, any intellectual activity (but, as a matter of fact, any activity *tout court*) can be considered and evaluated from a purely pragmatic viewpoint. This is true in particular for that special activity we call «education», which can be considered almost instinctive and sooner or later involves almost all of us, insofar as it concerns happiness and the role of our children in the society in which we live. That is the reason why, beyond the aesthetic taste that its practice arouses in many of us, its value is eminently pragmatic; and also the reason why, though education as an activity is universally acknowledged of fundamental importance, the value assigned to its different aspects depends on the different ways in which the ideal member of a society is imagined and described in different cultures: the Amish conception of education is abysmally different from the Inuit one, and this latter abysmally differs from the conception of education adopted in United States or in Germany. And when we speak of «education», we are not referring only to interpersonal behaviors or to attitudes towards the different contents of human knowledge, but also and above all to the often unconsciously shared philosophies that preside over them.

In the last two centuries, however, the conception of «education» has become more and more uniform in technologically advanced (mainly western, but also eastern) nations. The philosophy presiding to human attitudes and behaviors and, accordingly, to education, seems to be now unique, not subjected to critical analysis

As a matter of fact, «education» (in the broadest sense of the word) can be thought of as consisting of three steps: training, instruction and what we shall call «education» in the strict sense, or — in order to avoid confusion — «formation». Training is the lowest degree, as it simply aims at the reproduction of codified behaviors whose purpose is always dictated by an external authority and, at best, shared by virtue of an *a priori* choice: if one chooses to be a soldier, then one willingly undergoes a military training⁸; and if one chooses to practice diving, then one willingly undergoes a suitable training to learn how to act to avoid deadly dangers. Instruction is the second degree. It usually aims to provide learners, sometimes, with reasons for the behaviors prescribed by the training, and in general with a sort of arsenal of notions to achieve their possible future goals.

Under its second, general aspect, «instruction» seems to be much more linked to the third step of education, the so-called formation, insofar as only completely «formed» individuals are able to choose their own purposes. But let us give a closer glance to this question. In accordance with the *Declaration of Independence* of United States of America, the main goals of any individual are «life, liberty and the pursuit of happiness». As a consequence, the highest level of education must be the «formation» of the concepts of liberty and happiness in the minds of kids, or better of the ability to decide to what extent if necessary they will sacrifice their own liberty and happiness in the interest of community. These concepts and these decision-making skills grow

⁸But the reader is warned to pay particular attention to the word «willingly», as the maturation of a conscious will should be the task of the third step.

in the context of a *weltanschauung* which is almost always absorbed by osmosis from the surrounding environment and interwoven with the favorite ideas of the dominant classes, unless educators set themselves the goal of developing independence of thought in their disciples. But independence of thought is always looked upon with fear and suspicion by those who hold power and (at best) hold themselves responsible for the stability of the community and the well-being of its members. This is the reason why, throughout history, educators have been constantly discouraged from cultivating it in young minds, so that educational activity has always been more or less reduced, in all cultures, to its first two steps, training and instruction. Thus reduced, it truly makes its recipients, who are also the raw material that it should mold to obtain complete persons⁹, oppressed people, as PAULO FREIRE (1921-1997) could say (see [8]) . Moreover, such a conception of education unavoidably condemns the whole human world to immobility. We should never believe those who say that computers or cell phones have changed the world: the real changes are changes of goals, not just of tools to achieve always the same old results. Since many centuries (not to say since tribal social structures have been replaced by more complex structures in which interpersonal relationships are not only codified but also subject to formalized rules) the motivation of human behavior — with the only possible exception of few philosophers, religious prophets and so-called intellectuals — not only has been always the same, but also strongly oriented by some form of religious or political power. In particular, in our present sad world, it is held steady and unable to evolve by economic power (whose sole aim, on the other hand, is in turn to keep still and immovable).

It should also be obvious that it is this reduction of education to its first two steps, training and instruction, that produces the «shopkeeper's conception» of mathematics in the minds of almost all ordinary people (*i. e.* its reduction to training and instruction). So, on one hand, the reduction of education to training and instruction is an opposition to evolution, on the other hand if we reduce mathematics to training and instruction, as is even too often done in school teaching, then we not only stop evolution but also forget and deny the most important aspects of mathematics, which can be the best tools to realize the third step of education, that is the formation of individuals who not only are able to criticize any belief and to choose their own, but also to live in a community without necessarily accepting the dominant ideas used as a «glue» between its members by any kind of power (cf. [7]).

Axioms and free thought

As is well known, before Euclid mathematics could be (and on many points of view actually was) considered as an empirical science. As pointed out in [3] , the earliest mathematical discoveries, in both the fields of arithmetics and geometry, were inferred from experience by suitable generalizations. These generalizations were obtained by reasoning by analogy, exactly as is usually done in «inductive» sciences; but when Egyptian and Mesopotamian mathematics was incorporated into Greek culture, Greek

⁹It is often pointed out that the verb «to educate» descends from the latin verb *e-ducere*, that is «to lead outside». In other words, to extract, just like a sculpture from a marble block.

thinkers began to formulate more or less consciously and to use the assumption that analogies could become¹⁰ rules. Finally, Euclid understood that at least some of such rules were to be admitted *a priori*, and in a monumental work, his *Elements* [6], collected the results found by the mathematicians who had preceded him, together with many more new results, as consequences (in a suitable sense of the word) of a number of definitions, of «common notions» (κοιναί ἔννοιαι) and postulates (αἰτήματα, from the verb αἰτέω, which means «to demand» or «to require»). In this way, he gave rise to what would become the characteristic method of mathematics as a way of thinking: the axiomatic method.

But this method was better defined over the centuries thanks to the well-known problem of the «evidence» and «independence» of the fifth postulate, according to which, for any given straight line r and any point P not belonging to r , one and only one straight line parallel to r passes through P : this assumption seemed obvious, but not so obvious as not to require to be deduced from more immediate postulates (in particular, from the other postulates). Generations of mathematicians meditated about this problem, until — thanks to the great contributions by C. G. F. Gauss, J. Bolyai, N. Lobachewskij and B. Riemann — they reached the most revolutionary conclusion in the history of mathematics, or even of human thought. Before the discovery of non-euclidean geometries (Elliptic geometry, due to B. RIEMANN [18], and Hyperbolic geometry, due to Bolyai and Lobachewskij), the postulates were understood as «evident truths», *i. e.* partial descriptions of the empirical world that were not subjected to discussion or to doubt. But after their appearance in the world of mathematics, a new idea began to spread more and more among mathematicians: that the construction of mathematical theories is completely free, and is much more a matter of imagination than of strict adherence to some kinds of absolute truths. And this new idea gave rise, among many other lines of thought, and many fertile problems concerning the application of mathematics to logic and the foundations of mathematics as a *system* of theories (see *e. g.* [4, 9, 11, 12]), to the notion of «model» and to Hilbert's program of founding mathematical theories on a rigorous formalization procedure (see *e. g.* [22]).

The philosophical and cultural counterpart of this conclusion is twofold.

First, it suggests that *there is no absolute truth*, even about the empirical world. In our everyday's life, we are unconsciously accustomed to replace systems of experiences by abstract concepts, and our descriptions of these concepts are always subjective. So, it can be stated that *in our partial descriptions of empirical world, we all make always use of ἔννοιαι we deem to be κοιναί, and of private assumptions — αἰτήματα — from which we draw our own conclusions*. And our postulates and the conclusions we draw from them contribute to expressing our opinions on events and on the rules that produce them. In other words, each of us mathematizes continuously, but is completely unaware of this, until a mathematical educator comes to explain it to him.

Finally, what we consider an «absolute truth», is nothing more than the opinion most widely shared among active minds (and often passively accepted by lazy minds kept in ignorance). Any opinion can in principle be proposed as «truth», provided it reaches a sufficiently high percentage of consent, and any alternative opinion can

¹⁰Under appropriate conditions, however never explicit, and on which it was finally possible to give up by recognizing that the statements of mathematics never refer to the world of experience.

replace it when *its own* percentage of consent becomes higher. So, what we are used to call «truth», in almost any field of knowledge, is such only in a purely statistical sense. It is a *tale* that everyone, or almost everyone, believes in.

The impact of this conclusion on the way we view modern science and on the methods adopted today to develop scientific knowledge is hard to be overestimated. In almost every field of experimental sciences, the search for new general rules that make it possible to predict wider classes of phenomena is based on the formulation of models (systems of hypotheses — or postulates), and on the comparison of their consequences with empirical evidence (just as examples, see *e. g.* [1, 2] and the bibliographic references therein, that clearly show some of the most recent developments and applications of this philosophy).

But even deeper and wider is the cultural significance of this great result, which has two main aspects. On one hand, it leads us back to the notion of «Oppressed» and to the problem tackled by P. FREIRE [7, 8]. The oppressed are indeed the people kept away from any awareness of their freedom of thought, and consequently compelled to accept *dominant* tales as «absolute truths». On the other hand, it also leads us to recognize that every mathematical theory is a tale about the mathematical objects defined by its axioms, so that, conversely, any tale, when suitably structured from a logical viewpoint, can be regarded as a kind of little mathematical theory that describes its characters in logically consistent terms. In this connection, we cannot fail to observe that, although the study of the relationships between mathematics and literature has become very fashionable in recent years [5], this point is regularly ignored. Almost all the contributions to the debate about this fascinating topic focus on how much mathematics is cited, described or used in different literary texts. Not one of them attempts to explain how and why mathematics is *always* literature, and good literature, as a verbal (*i. e.* formal) expression of human imagination, is mathematics¹¹.

In conclusion, if the teaching of mathematics aims to be complete, it must stimulate the exercise of the imagination. This, among other things, by putting the minds of students in contact with the universe of possibilities, also develops their critical spirit towards the actual world and frees them from the slavery of the claimed absolute truths imposed by others.

But now, we must turn our attention to a not less deep and socially important feature of any mathematical theory: the role of proof. In what we have said above, we have mentioned many times — in connection with our everyday life experiences or with scientific experiments — the *consequences* of the postulates, or the *conclusions* we draw from them. We are thus led to the notion of proof.

Proofs and responsibility

Together with wide parts of mathematical nomenclature, which often seem useless and complicated and difficult to remember, proofs are probably perceived by students as the hardest part of mathematics. It could almost be asserted, without risk of denial,

¹¹A careful reflection on Lewis Carroll and Jorge Luis Borges would show us this circumstance with luminous clarity

that most mathematical propositions would be better accepted by students as news without explanation than as theses to be proved. This is probably due to the fact that collecting and storing in memory an information list, without any prescribed order, is much easier than understanding the logical order of the intermediate propositions of even a single proof. The learner can choose his own order according to associations of ideas which are entirely personal.

Nevertheless, *proof* is a fundamental step in any exchange of information, with particular regard to information needed in decision processes. For example, any leader of a community chooses his/her «political» actions by first postulating a description of the world in which the community lives and of the ways in which it should be modified, then deducing by a (hopefully logical) reasoning the behaviors that members of the community must adopt to obtain the desired changes. Once his/her decisions have been taken, he/she has also to choose whether to impose his/her own conclusions or to convince as many people as possible of the adequacy of the prescribed behaviors to achieve the aims assumed (notice that he/she cannot convince anyone of the goodness of his goals, which are *postulated*). The second choice corresponds to clearly explaining his/her reasoning, step by step, so that everyone could not only understand it, but also reproduce it, and discover any errors nested therein. This procedure is what mathematicians would call «a proof» of the statement: *The prescribed behaviors will lead to the desired goals.*

So, it seems that we can state that *proofs*, any kind of proofs, are political actions or, more generally, *social* actions. The mathematical habit to proofs was born, of course, from the initial need of mathematicians to convince themselves, but the rule of always making public the proofs of all propositions that had not already been required *a priori* to be undoubtedly accepted owes its origin to the desire to share and spread, at least among people of a certain intellectual stature, the knowledge of these fantastic objects (defined more or less consciously by abstraction) which were mathematical objects. In other words, it corresponds to the instinct to teach and — as it refers to objects that are not (or at least not entirely) empirical — replaces *ostensive* teaching, which instead is allowed and effective when it refers to concrete objects.

It should be noted, at least in passing, that purely ostensive teaching has much more to do with training than with education. It corresponds to learning by *imitation* and, insofar as it concerns general laws, it is often reduced to ingenuous inductive generalizations, not subjected to subsequent control programs as in modern statistical procedures which, not surprisingly, originate from a careful mathematization of the relationships between the contents of experience.

In the present context, however, we are not interested in a comparison between ostensive teaching and the use of proofs (which we could call «analytic teaching»), that would lead us too far from the main object of our analysis. We simply want to stress that the habit of mathematicians to prove all the statements not accepted *a priori* by mutual agreement can, or rather must, be interpreted as an assumption of responsibility, as the waiver of any attempt at oppression, as an attempt to escape dogmatic attitudes and even the vaguest suspicion of lies, and finally as the willingness to be criticized, contradicted and corrected, as well as an attempt to define a criterion for comparison of opinions. This dream was first pursued fully by the mathematician

and philosopher G. W. Leibniz, with his universal calculus («*characteristica universalis*», see [9]), and it is not by chance that the studies of modern logic were started by mathematicians. Of course, modern studies on undecidability, also initiated and developed by mathematicians, from K. GÖDEL [11] (english translation of his original paper of 1931), A. CHURCH [4] and R. GOODSTEIN [12] onwards, have proved that Leibniz's dream will never come true. But also this fundamental result — which can be expressed by the statement that we will probably always need additional axioms to achieve more and more complete descriptions of the contents of our (either purely intellectual or sensorial) experience — turns out to be of the greatest relevance for education of individuals. We learn that, in addition to our freedom to imagine descriptions of objects to collect and explain entire classes of experiences, there is also the *need* to imagine new descriptions in order to explain ever broader classes of experiences. This conclusion — together with our awareness that the methods followed to deduce our explanations need to be compared with those of any other individual, in order to establish which system of explanations is *better* (*not* more true) — helps to develop what we will call our sense of responsibility.

Conclusion

Mathematical objects are — as William Shakespeare wrote ([20], Act V, Scene 1) — «such stuff as dreams are made on»: this is the substance of the *freedom* of mathematics, as well as of its «cold beauty» [19] and of the emotions that research and discovery arouse in mathematicians [21] . But leading young people to discover this deep truth, and teaching them the fundamental language and methods of mathematics (axiomatization, demonstration, . . .) enables them to communicate dreams knowing that they are such, to reason about their contents and compare them, and decide *together* which ones of them are best suited to represent that dream that we consider common, called «real world» or «daily life»: this is the substance of the *responsibility* of mathematics, since it was born as an activity inspired by the desire to share knowledge, even if it was knowledge concerning dreams¹². So, we arrive at a landscape quite opposite to the one drawn in [23] , where all characters think and behave as if only one description of the world were possible, and at a definition of education opposite to mere training [7, 13] . There are two ways to be «we» rather than «I and you and they»: (1) allowing the flux of dreams from a mind to another [7, 13, 17] , and (2) trying to fill all minds with the same dream, decided elsewhere, which will produce oppression [8] . The former promises a longer duration and the evolution of human world, as it allows a much smoother recovery of errors, however serious they may be. The latter can produce errors that, passively reproduced and amplified by all human beings, could lead (it seems to be leading already now) mankind to ruin. We cannot but wait with trepidation for the outcome of the competition between them.

¹²This feature was not known at the dawn of mathematics

References

- [1] N. Bellomo, A. Bellouquid, L. Gibelli and N. Outada, *A Quest Towards a Mathematical Theory of Living Systems*, Birkhauser, Basel, 2018.
- [2] N. Bellomo, G. Ajmone Marsan and Andrea Tosin, *Complex Systems and Society: Modeling and Simulation*, Springer, New York, 2013.
- [3] C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, Wiley and Sons, New York, 1968.
- [4] A. Church, A note on the *Entscheidungsproblem*, *Journal of Symbolic Logic* **1** (1936), 40-41.
- [5] A. Doxiadis and B. Mazur (eds.), *Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative*, Princeton University Press, Princeton (2012).
- [6] Euclid and T. L. Heath, *The thirteen books of Elements*, volumes 1–3, Oxford University Press, Oxford, 1908.
- [7] P. Freire, *Education: the practice of freedom*, Writers and Readers Ltd, London, 1976.
- [8] P. Freire, *Pedagogy of the Oppressed*, Penguin Classics, New York, 2017.
- [9] D. M. Gabbay and J. Woods (eds.), *Handbook of the History of Logic*, vol. 3: *The rise of modern logic: from Leibniz to Frege*, Elsevier–North-Holland, Amsterdam, 2004.
- [10] G. Gentile, *Sommario di pedagogia come scienza filosofica II. Didattica*, Sansoni, Firenze (1955)⁵.
- [11] K. Gödel, *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*, Dover Publications, New York, 1992.
- [12] R. Goodstein, On the restricted ordinal theorem, *Journal of Symbolic Logic* **9** (1944), 33-41.
- [13] B. Hooks, *Teaching to Transgress: Education as a Practice of Freedom*, Routledge, New York, 1994.
- [14] M. Kline, *Mathematics in western culture*, Oxford University Press, Oxford, 1964.
- [15] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [16] J.-P. Migne (ed.), *Sancti Aurelii Augustini hipponensis episcopi opera omnia*, J.-P. Migne, Paris, 1841.
- [17] M. Richardson, The place of mathematics in a liberal education, *National Mathematics Magazine* **19** (7) (1945), 349–358.

- [18] B. Riemann, *Collected Papers (XIII. The hypotheses on which geometry is based)*, Kendrick Press, Heber City, 2004.
- [19] B. Russell, The study of mathematics, in B. Russell, *Mysticism and Logic*, Allen & Unwin, London, 1917.
- [20] W. Shakespeare, *The tempest*, in *Collins Tudor Shakespeare*, volume 1, *Comedies*, edited by P. Alexander, Collins, London and Glasgow, 1969.
- [21] A. Weil, De la métaphysique aux mathématiques, in *Œuvres scientifiques. Collected papers*, volume II (1951-1964), Springer-Verlag, New York, 1979.
- [22] E. Zach, Hilbert's Program, in Edward N. Zalta (ed.), *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Center for the Study of Language and Information (CSLI), Stanford University, 2019.
- [23] E. I. Zamjatin, *We*, Penguin Books, London, 2020.

HEGEL e le Catastrofi

HEGEL and the Catastrophese

Nicola Fusco ¹

Abstract

In questo lavoro si mette in parallelo il collegamento che, nel suo testo fondamentale “La Scienza della Logica”, il filosofo HEGEL pone tra **Quantità** e **Qualità**, con i concetti introdotti, a partire dalla seconda metà del XX secolo, dalla **Teoria delle Catastrofi**, una branca della Matematica sviluppata per analizzare i cambiamenti repentini e improvvisi nei sistemi complessi una volta che vengono raggiunte determinate condizioni.²

Presentiamo innanzitutto una sintesi dei concetti di **Quantità** e **Qualità** nel sistema filosofico di HEGEL e di come essi interagiscono tra loro.

Successivamente presentiamo la **Teoria delle Catastrofi**, analizzandone gli aspetti fondamentali e introducendo gli strumenti sviluppati nel suo ambito per i fini descritti e vedremo diverse applicazioni della **Teoria delle Catastrofi** in alcuni ambiti diversi.

Infine esponiamo come il legame e la mutua influenza tra i concetti hegeliani di QUALITÀ e QUANTITÀ ricevono una giustificazione rigorosa mediante la Teoria delle Catastrofi.

La Scienza della Logica di HEGEL

Nel sistema filosofico di HEGEL, i concetti di **Quantità** e **Qualità** sono strettamente collegati e giocano un ruolo fondamentale nella sua dialettica, rappresentando una chiave per comprendere lo sviluppo e l’evoluzione della realtà. HEGEL affronta questi concetti all’interno del suo approccio filosofico, in particolare nella “Scienza della Logica”, delineando il processo attraverso il quale la qualità si trasforma in quantità.

Qualità rappresenta l’essenza o la natura intrinseca di un oggetto o di un concetto. È la caratteristica distintiva che definisce un’entità, capace di aumentare o diminuire pur rimanendo identica attraverso cambiamenti o variazioni quantitative. Nella

¹nicola.fusco@gmail.com

²dei cui esempi siamo testimoni a cadenza ormai quasi mensile in ambito meteorologico e climatico.

“Scienza della Logica”, HEGEL presenta inizialmente la qualità come *determinatezza esistente* e distingue due modalità di determinazione della qualità in conformità con i momenti dell’esistenza: la qualità è innanzitutto determinata per sé stessa dalla propria definizione e da come essa può caratterizzare l’essenza di un ente, poi possiede una determinazione intrecciata con la quantità, e che evolve insieme con essa.

Quantità, d’altra parte, si riferisce a un *essere privo di contenuto* o a un grado di qualità. La quantità è la misura o il grado di una qualità.

Nel processo dialettico, HEGEL identifica tre fasi fondamentali: **tesi**, **antitesi** e **sintesi**. La **tesi** rappresenta la qualità iniziale di un concetto o oggetto, l’**antitesi** emerge come la negazione o il contrario della **tesi**, mentre la **sintesi** è la risoluzione che unifica e supera le opposizioni precedenti. In questo contesto, la **sintesi** rappresenta il nuovo stadio, che può essere considerato come una nuova qualità che emerge dalla contraddizione.

La dialettica di HEGEL è spesso descritta come avente una struttura a spirale a causa del modo in cui si sviluppa attraverso il processo di tesi, antitesi e sintesi. Il processo, in realtà, non si ferma alla sintesi, ma continua con la nuova tesi che diventa la base per un’altra antitesi e sintesi. In questo modo, la dialettica di HEGEL si sviluppa in un processo continuo che si muove in avanti, ma anche ritorna su se stesso in un movimento a spirale perché il processo dialettico non è lineare, ma è un processo di costante sviluppo e ritorno.

HEGEL sostiene che i cambiamenti quantitativi possono portare a cambiamenti qualitativi quando viene superata la “barriera della differenza qualitativa”. Il momento cruciale di questa trasformazione è la misura. HEGEL sostiene che la misura è il risultato dell’interazione tra qualità e quantità, e rappresenta la sintesi di entrambe. La misura sottolinea che la quantità stessa può diventare una nuova qualità: se si aumenta la temperatura di una sostanza, può verificarsi un cambiamento qualitativo come la transizione da solido a liquido o da liquido a gas.

L’idea di HEGEL è che una grandezza G non è mai separata dalle qualità secondarie α e β : ogni grandezza o quantità ha sempre delle qualità associate. Quindi una misura dipende da una qualità concreta G_α o G_β , cioè da un polo di un bi-polo logico: la grandezza G da sola è un polo, mentre una delle sue qualità secondarie rappresentano l’altro polo, inestricabilmente e intrinsecamente legato al primo. In altre parole, la grandezza e le sue qualità secondarie sono intrinsecamente legate e non possono essere separate. Questo significa che il valore numerico che otteniamo da una misura non è solo un numero astratto, ma è strettamente legato alla qualità specifica che stiamo misurando. Tuttavia, il numero particolare, l’unità, che esprime il risultato di una misura è la quantità G da sola: nonostante la misura dipenda da una qualità concreta, il risultato numerico che otteniamo rappresenta la grandezza in sé.

Tornando all’esempio dell’acqua che cambia stato di aggregazione, noi misuriamo direttamente sempre e solo la temperatura, ma nei due stati essa è collegata ad aspetti qualitativi diversi della meccanica microscopica: nello stato liquido l’energia interna è costituita, in porzione non trascurabile, dalle energie di interazione delle molecole, e quindi solo in parte dalla loro energia cinetica (della cui media la temperatura costituisce una misura); nello stato gassoso, come è noto, le interazioni tra le molecole

sono per lo più trascurabili e quindi l'energia interna è costituita del tutto dall'energia cinetica delle molecole.

In altre parole, secondo HEGEL, la quantità e la qualità non sono categorie separate, ma sono intrinsecamente collegate, definendosi a vicenda, interconnesse attraverso un processo dialettico. Questo è un aspetto fondamentale della sua dialettica, in cui la contraddizione e la sintesi tra opposti guidano il processo di sviluppo e cambiamento. La comprensione di questo processo è fondamentale per cogliere l'evoluzione e la trasformazione della realtà: i concetti di qualità e quantità sono fondamentali per la comprensione della dialettica hegeliana e del suo approccio alla logica e alla metafisica. La teoria di Hegel sottolinea l'interdipendenza tra quantità (grandezza) e qualità, e come queste due categorie si influenzano a vicenda nel processo di misurazione. La misura emerge come il punto culminante in cui qualità e quantità si fondono, aprendo la strada a nuove fasi di sviluppo e cambiamento.

La Teoria delle Catastrofi

La **Teoria delle Catastrofi** è una delle branche della Matematica che studia l'emersione di comportamenti discontinui all'interno di sistemi continui. L'ispirazione è l'osservazione di questi comportamenti in numerosi sistemi naturali ma, come sempre accade in Matematica, la teoria si è poi sviluppata in modo più generale, ampio e astratto, acquisendo maggiore efficacia e generalità, nonché capacità di applicazione in ambiti anche diversi.

Tale teoria è strettamente intrecciata con la Teoria dei Sistemi Dinamici e in particolare con quella dei Sistemi Caotici, ma presenta comunque una sua indipendenza concettuale.

Le tappe principali dello sviluppo di questa teoria sono state

- 1955, **Teoria delle Singolarità** di HASSLER WHITNEY,
- 1960, **Teoria delle Catastrofi** di RENÉ THOM,
- 1970, ripresa della **Teoria delle Catastrofi** da parte di CHRISTOPHER ZEE-MAN,
- 1980, **Teoria delle Biforcazioni** di VLADIMIR ARNOLD.

Il termine *catastrofe* in questo ambito ha un significato tecnico ben preciso. Non indica necessariamente un evento dalle conseguenze nefaste di grandi dimensioni, ma la realizzazione di un cambiamento macroscopico del sistema come conseguenza di un cambiamento di piccola entità di una qualche grandezza.

Se perturbiamo il moto di un satellite artificiale in orbita circolare intorno alla Terra, questa perturbazione, in funzione della sua intensità e della sua direzione, può provocare una deformazione dell'orbita in ellisse, un allontanamento indefinito del satellite dalla Terra o il suo precipitare sulla superficie terrestre: quest'ultimo esito è sicuramente una catastrofe nel significato usuale del termine, ma non ha nulla a che

vedere con quelle di cui invece tratta la **Teoria delle Catastrofi**, perché l'orbita emergente dalla perturbazione si modifica sempre in modo continuo con la perturbazione (figura 1).

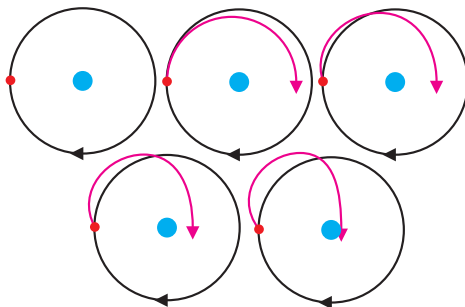


Figura 1

Un esempio di catastrofe nel senso della **Teoria delle Catastrofi** si può osservare con un modello semplificato di un ponte: consideriamo due travi di lunghezza L incernierate tra loro e collegate da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo $l < L$; su tutto il sistema agisce il peso $\vec{P}$ combinato del ponte e del carico che, per semplicità, consideriamo applicato nel punto di giunzione delle due travi (figura 2 sinistra).

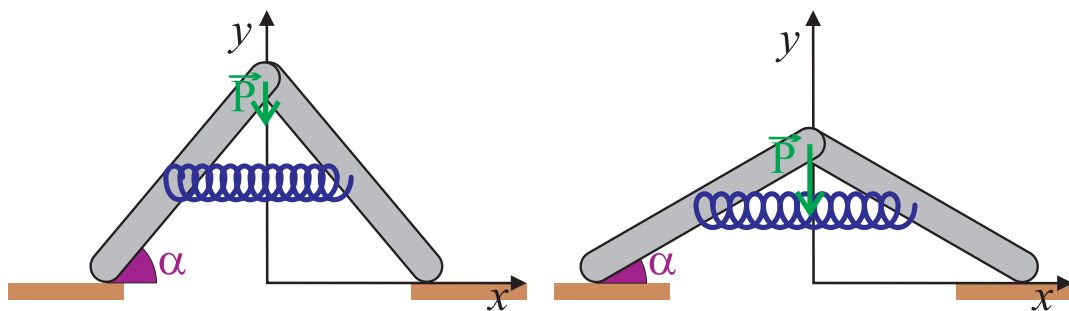


Figura 2

All'aumentare del modulo di $\vec{P}$ il ponte si abbassa e la molla si allunga (figura 2 sinistra). Al di sotto di una certa soglia, ad ogni valore di P il ponte ha una sua posizione di equilibrio che varia con continuità. Ma se il valore di P aumenta troppo, ad un certo punto non sono più possibili posizioni di equilibrio con la giunzione al di sopra del piano di appoggio, il ponte si piega al contrario crollando e portandosi improvvisamente in una configurazione di equilibrio con la giunzione al di sotto del piano di appoggio (figura 3).

Questa transizione è discontinua: non appena si supera anche di poco il valore critico per P , la posizione della giunzione si allontana macroscopicamente da quella

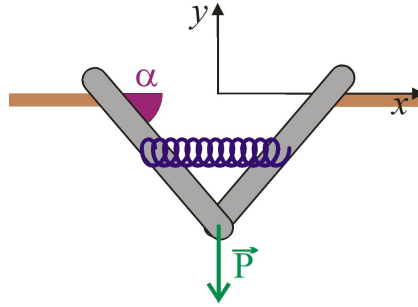


Figura 3

che si aveva poco prima del superamento. Questa è una catastrofe nel senso definito dalla **Teoria delle Catastrofi**, perché compare all'improvviso una variazione discontinua di una grandezza che caratterizza il sistema. Questa discontinuità emerge spontaneamente in un sistema continuo in tutti i suoi meccanismi elementari: tutti i parametri del sistema, in particolare P e l'ordinata della giunzione, possono variare con continuità senza che ci sia alcun motivo a priori che introduca discontinuità, infatti tutte le grandezze fisiche (inclusa l'energia potenziale che useremo a breve per l'analisi di questo sistema) sono definite per qualsiasi posizione del ponte e valore di P .

Analizziamo una Catastrofe

L'energia potenziale del ponte descritto prima è

$$\begin{cases} U(\alpha) = PL \sin \alpha + \frac{1}{2}k(L \cos \alpha - l)^2 \\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \quad (1)$$

Per analizzare le condizioni di equilibrio del sistema dobbiamo studiare segno e monotonia di U . L'analisi verrà svolta parzialmente in forma grafica. Riscriviamo innanzitutto l'energia potenziale nella forma

$$\begin{cases} U(\alpha) = kl^2 \left[\underbrace{A \sin \alpha + \frac{1}{2}(\cos \alpha - B)^2}_{u(\alpha)} \right] \\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \wedge A = \frac{P}{kl} \wedge B = \frac{l}{L} \end{cases} \quad (2)$$

Fissati i parametri k e L , cosa che può essere fatta senza perdere generalità, tutto dipende dalle caratteristiche di $u(\alpha)$. In questa riscrittura A misura l'intensità di P rispetto alla forza elastica, mentre B è semplicemente il rapporto di proporzionalità tra le lunghezze caratteristiche del sistema: nel seguito consideriamo $0 < B \leq 1$ perché altri valori non sarebbero realistici. Per determinare il segno di $u(\alpha)$, innanzitutto calcoliamo i valori agli estremi e nel punto medio dell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e poi ne determiniamo gli zeri.

$u(\alpha)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
	$-A + \frac{1}{2}B^2$	$\frac{1}{2}(1-B)^2$	$A + \frac{1}{2}B^2$

Tabella 1: Valori particolari di $u(\alpha)$.

Risulta quindi $u(-\frac{\pi}{2}) \geq 0 \Leftrightarrow A \leq \frac{1}{2}B^2$. Per gli zeri abbiamo l'equazione

$$\left\{ \begin{array}{l} A \sin \alpha + \frac{1}{2}(\cos \alpha - B)^2 = 0 \\ \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ s = \pm \sqrt{1 - B^2} \wedge c = B \\ c^2 + s^2 = 1 \\ s = \sin \alpha \wedge c = \cos \alpha \\ \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array} \right. \wedge \left\{ \begin{array}{l} A > 0 \\ s = -\frac{1}{2A}(c - B)^2 \\ c^2 + s^2 = 1 \\ s = \sin \alpha \wedge c = \cos \alpha \\ \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array} \right. \quad (3)$$

Il sistema per $A = 0$ equivale all'intersezione tra la retta verticale $c = B$ e la semicirconferenza goniometrica destra. Il sistema per $A > 0$ equivale all'intersezione tra una parabola, con concavità rivolta verso il basso e vertice in $V(B, 0)$, e la semicirconferenza goniometrica destra.

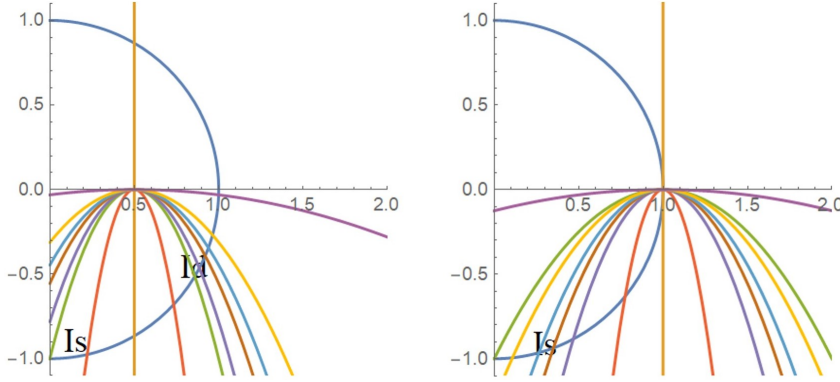


Figura 4: Grafici della parabola di equazione $s = -\frac{1}{2}A(c - B)^2$, con $B = 0.5$ (sinistra), $B = 1$ (destra), e A variabile da 0 a 4, sovrapposti alla semicirconferenza goniometrica destra.

Dall'analisi grafica si può evincere quanto segue.

- Se $B < 1$, esiste un'intersezione **Id**, che corrisponde ad uno zero $-\alpha_d$ di u con $B < \cos(-\alpha_d) < 1$.
- Se $A = 0$, abbiamo l'unico caso in cui uno degli zeri è positivo. In questo caso $u(\alpha) = \frac{1}{2}(\cos \alpha - B)^2$, quindi non è mai negativa e pertanto i due zeri sono anche dei minimi di u .

- Se $0 < A \leq \frac{1}{2}B^2$,³ esiste anche un'altra intersezione **Is**, che corrisponde ad uno zero $-\alpha_s$ di u con $0 \leq \cos(-\alpha_s) < B$. In particolare per $A = \frac{1}{2}B^2$ **Is** corrisponde a $(0, -1)$.
- Entrambi gli zeri sono angoli negativi, dato che le intersezioni sono entrambe nel quarto quadrante.
- Dato che $u(0), u(p/2) > 0$, $-\alpha_d$ rappresenta un cambio di segno (da $-$ a $+$) per $u(\alpha)$.
- Dato che l'esistenza di **Is** si accompagna a valori positivi di $u(-\frac{\pi}{2})$, allora $-\alpha_s$, quando esiste, rappresenta sempre un passaggio da valori positivi a valori negativi di $u(\alpha)$.

Il segno di $u(\alpha)$ è, quindi,

$A = 0$	$-\frac{\pi}{2}$		$-\arccos B$		$\arccos B$		$\frac{\pi}{2}$
$u(\alpha)$	+	---	0	---	0	---	+
$0 < A < \frac{B^2}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$		$-\alpha_s$		$-\alpha_d$		$\frac{\pi}{2}$
$u(\alpha)$	+	---	0	---	0	---	+
$A = \frac{B^2}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$		$-\alpha_d$		0		$\frac{\pi}{2}$
$u(\alpha)$	0	---	0	---	+	---	+
$A > \frac{B^2}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$		$-\alpha_d$		0		$\frac{\pi}{2}$
$u(\alpha)$	-	---	0	---	+	---	+

Procediamo ora allo studio della monotonia. La derivata di u rispetto ad α è

$$u'(\alpha) = A \cos \alpha - \sin \alpha (\cos \alpha - B) \quad (4)$$

Per determinare il segno di $u'(\alpha)$, calcoliamo innanzitutto i valori agli estremi e nel punto medio dell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$u'(\alpha)$	$-B < 0$	$A \cos \alpha > 0$	$B > 0$

Tabella 2: Valori particolari di $u'(\alpha)$.

quindi u è decrescente in prossimità di $-\frac{\pi}{2}$, e crescente in prossimità di 0 e di $\frac{\pi}{2}$. Essendo continua e derivabile, u ammette quindi almeno un minimo liscio in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dobbiamo stabilire se e in che condizioni ci sono altri punti stazionari e caratterizzarli. Determiniamo gli zeri di $u'(\alpha)$

³Gli stessi valori per cui $u(-\frac{\pi}{2}) \geq 0$.

$$\begin{cases} A \cos \alpha - \sin \alpha (\cos \alpha - B) = 0 \\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{Ac}{c-B} \\ c^2 + s^2 = 1 \\ s = \sin \alpha \wedge c = \cos \alpha \\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \quad (5)$$

Questo sistema equivale all'intersezione tra un'iperbole, passante per l'origine e con asintoto verticale di equazione $c = B$, e la semicirconferenza goniometrica destra. Risulta, evidentemente, $s \leq 0$ per $0 \leq c < B$ e $s > 0$ per $c > B$.

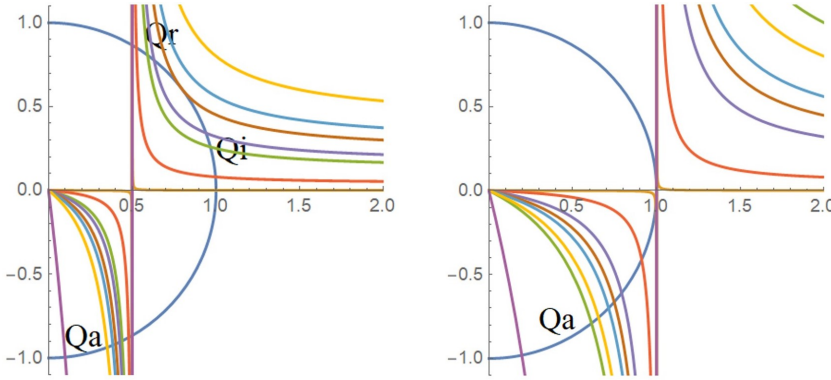


Figura 5: Grafici dell'iperbole di equazione $s = \frac{Ac}{c-B}$, con $B = 0.5$ (sinistra), $B = 1$ (destra), e A variabile da 0 a 4, sovrapposti alla semicirconferenza goniometrica destra.

Dall'analisi grafica si possono trarre le seguenti conclusioni.

- Esiste un'intersezione **Qa** a sinistra dell'asintoto verticale, che corrisponde ad uno zero $-\alpha_a$ di $u'(\alpha)$ per cui $0 < \cos(-\alpha_a) < \min\{B, 1\}$ e $\sin(-\alpha_a) < 0$. Inoltre risulta $-\alpha_a$ decrescente in A .
- Se $B < 1$ (figura 5 sinistra) sono possibili anche altre due intersezioni, **Qr** e **Qi**, che corrispondono a ulteriori due zeri $u'(\alpha)$, α_r e α_i , per i quali $B < \cos \alpha < 1$ e $0 < \sin \alpha < \sqrt{1 - B^2}$. **Qr** ha ascissa minore di **Qi** ma, essendo il coseno decrescente in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, risulta $\alpha_r > \alpha_i$. Inoltre risultano α_r e α_i , rispettivamente, decrescente e crescente in A .
- Fissato $B < 1$, l'esistenza di questi altri due zeri dipende dal valore di A .⁴ In particolare esiste un valore critico A_T per cui ramo destro dell'iperbole è tangente alla circonferenza: se $A < A_T$ esistono i due zeri aggiuntivi, se $A > A_T$ l'unico zero è $-\alpha_a$.

⁴Quindi, in definitiva, dall'intensità P del peso.

- Dato che il punto di tangenza si trova nel quarto superiore di circonferenza, possiamo studiare il sistema tra l'equazione dell'iperbole e l'equazione $s = \sqrt{1 - c^2}$. Inoltre ci interessa la tangenza, quindi devono essere uguali anche le derivate di s rispetto a c per entrambe le curve.

$$\begin{cases} s = \frac{Ac}{c-B} \\ s = \sqrt{1 - c^2} \end{cases} \wedge \begin{cases} s' = -\frac{AB}{(c-B)^2} \\ s' = -\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{Ac}{(c-B)^2} \\ \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{AB}{(c-B)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{(c-B)\sqrt{1-c^2}}{c} \\ \frac{(c-B)\sqrt{1-c^2}}{c} = \frac{c(c-B)^2}{B\sqrt{1-c^2}} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} A_T = \frac{(\sqrt[3]{B}-B)\sqrt{1-\sqrt[3]{B^2}}}{\sqrt[3]{B}} = \sqrt{(1-\sqrt[3]{B^2})^3} \\ c_T = \sqrt[3]{B} \end{cases} \quad (6)$$

Quindi abbiamo i due zeri aggiuntivi distinti se $0 < A < \sqrt{1 - \sqrt[3]{B^2}}$. Il punto di tangenza corrisponde all'angolo $\alpha_T = \arccos \sqrt[3]{B}$.

Ogni intersezione tra l'iperbole e la semicirconferenza corrisponde ad un cambio di segno di $u'(\alpha)$, mentre l'angolo α_T che corrisponde alla tangenza è uno zero di $u'(\alpha)$ intorno a cui non c'è alcun cambio di segno. Dati i segni di u' agli estremi di $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, possiamo quindi tracciare i seguenti diagrammi del segno di $u'(\alpha)$.

$$\begin{array}{cccccccccccc} A < \sqrt{(1 - \sqrt[3]{B^2})^3} & -\frac{\pi}{2} & & & -\alpha_a & & & \alpha_i & & & \alpha_r & & \frac{\pi}{2} \\ u'(\alpha) & - & - & - & 0 & - & - & 0 & - & - & 0 & - & + \\ u(\alpha) & & & & \searrow & & \nearrow & M & \searrow & & m & \nearrow & \end{array}$$

Sono quindi presenti due minimi, in $-\alpha_a$ e in α_r , e un massimo, in α_i . Dalla figura 5 sinistra si deduce che per $A = 0$, $\cos(-\alpha_a) = B$ e $\sin(-\alpha_a) = -\sqrt{1 - B^2}$, quindi $u(-\alpha_a) = 0$, inoltre $\cos \alpha_r = B$ e $\sin \alpha_r = \sqrt{1 - B^2}$ quindi $u(\alpha_r) = 0$. Per $0 < A < \sqrt{(1 - \sqrt[3]{B^2})^3}$ invece risulta $u(-\alpha_a) < 0$ e $u(\alpha_r) > 0$.⁵

$$\begin{array}{cccccccccccc} A = \sqrt{(1 - \sqrt[3]{B^2})^3} & -\frac{\pi}{2} & & & -\alpha_a & & & \alpha_T = \arccos \sqrt[3]{B} & & & & & \frac{\pi}{2} \\ u'(\alpha) & - & - & - & 0 & - & - & 0 & - & - & & & + \\ u(\alpha) & & & & \searrow & & \nearrow & F & \searrow & & & & \end{array}$$

È presente un solo minimo in $-\alpha_a$ e un flesso orizzontale crescente in α_T . Risulta $u(\alpha_T) > 0$ ⁶ e $u(-\alpha_a) < 0$ ⁷.

⁵Perché il minimo assoluto di u deve essere negativo dato che u è derivabile e assume segni alterni in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e inoltre u è positiva per $\alpha > 0$.

⁶Dato che $\alpha_T > 0$ e abbiamo già stabilito che $u > 0$ per $\alpha > 0$.

⁷Per gli stessi motivi del caso $A < \sqrt{(1 - \sqrt[3]{B^2})^3}$.

In questo caso possiamo determinare l'espressione esatta dell'angolo $-\alpha_a$ perché conosciamo la soluzione di tangenza $c_T = \sqrt[3]{B}$ del sistema $\begin{cases} s = \frac{\sqrt{(1-\sqrt[3]{B^2})^3 c}}{c-B} \\ s = \sqrt{1-c^2} \end{cases}$ da cui si ottiene l'equazione polinomiale⁸

$$c^4 - 2Bc^3 + 3\sqrt[3]{B^2}(\sqrt[3]{B^2} - 1)c^2 + 2Bc - B^2 = 0 \Rightarrow (c - \sqrt[3]{B})^2 [c^2 - 2(B - \sqrt[3]{B})c - B\sqrt[3]{B}] = 0 \quad (7)$$

Dall'azzerarsi della seconda parentesi della (7) abbiamo le soluzioni $c_{1,2} = B - \sqrt[3]{B} \pm \sqrt{\frac{B^3+B}{B+\sqrt[3]{B}}}$ che hanno segno opposto:⁹ quella di interesse è $c_a = \cos?(-\alpha_a) = B - \sqrt[3]{B} + \sqrt{\frac{B^3+B}{B+\sqrt[3]{B}}}$.

$$\begin{array}{ccccccc} A > \sqrt{(1 - \sqrt[3]{B^2})^3} & -\frac{\pi}{2} & & & -\alpha_a & & \frac{\pi}{2} \\ u'(\alpha) & - & - & - & 0 & - & + \\ u(\alpha) & & & \searrow & m & \nearrow & \end{array}$$

È presente un solo minimo in $-\alpha_a$ e $u(-\alpha_a) < 0$.¹⁰ Il flesso presente nel caso $A = \sqrt{(1 - \sqrt[3]{B^2})^3}$ è ancora presente ma ha tangente obliqua è interessante determinarne le caratteristiche.

Possiamo quindi riassumere tutte le informazioni nel seguente grafico
Tranne che per $A = 0$ (grafico arancio nella figura 6), in tutti i casi in cui sono presenti due minimi abbiamo due posizioni di equilibrio con stabilità differente, una stabile ($-\alpha_a$) in quanto minimo assoluto, e una metastabile (α_r) in quanto minimo relativo (grafici rosso, verde e indaco nella figura 6). Per $A = 0$ i due minimi sono entrambi assoluti.

Al variare di A , gli zeri di u' sono rappresentabili con il seguente grafico.
Il ramo blu è quello stabile: rappresenta le posizioni del minimo assoluto dell'energia potenziale. Il ramo arancione è quello instabile: rappresenta le posizioni del massimo liscio dell'energia potenziale.¹¹ Il ramo verde è quello metastabile: rappresenta le posizioni del minimo relativo (più alto di quello assoluto) dell'energia potenziale, tale

⁸La scomposizione è ottenuta facilmente tenendo presente che $c_T = \sqrt[3]{B}$ è una soluzione con molteplicità 2, essendo di tangenza, e quindi si può abbassare di grado due volte usando il metodo di RUFFINI.

⁹Questo può essere dedotto per via grafica: una delle due soluzioni corrisponde all'intersezione tra l'iperbole e la semicirconferenza goniometrica sinistra nel secondo quadrante, l'altra corrisponde all'intersezione nel quarto quadrante. Oppure può essere verificato con il prodotto delle due soluzioni, $\left(B - \sqrt[3]{B} + \sqrt{\frac{B^3+B}{B+\sqrt[3]{B}}}\right) \left(B - \sqrt[3]{B} - \sqrt{\frac{B^3+B}{B+\sqrt[3]{B}}}\right) = -B\sqrt[3]{B} < 0$: il prodotto è negativo, quindi i due fattori hanno segno opposto.

¹⁰Per gli stessi motivi del caso $A < \sqrt{(1 - \sqrt[3]{B^2})^3}$.

¹¹Nel massimo liscio $u' = 0$, quindi il sistema resta fermo se posto in questa precisa posizione, ma non appena ne viene allontanato anche di poco, la posizione del sistema si allontana macroscopicamente da tale punto in quanto si innescano delle forze che spingono verso uno dei due minimi.

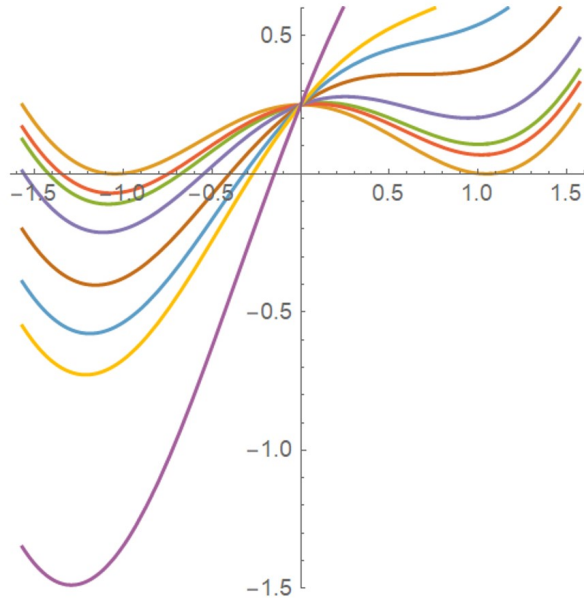


Figura 6: Grafici di $u(\alpha)$, con $B = 0.5$ e A variabile da 0 a 4.

posizione ha le stesse proprietà di quella di un equilibrio stabile finché gli spostamenti dalla posizione di equilibrio non diventano troppo grandi.

Supponiamo che il ponte abbia inizialmente carico nullo e venga lasciato andare dalla posizione verticale in condizioni di sovrasmorzamento:¹² il ponte si porrà nella posizione di equilibrio α_r corrispondente ad $A = 0$. Aumentando A il ponte modificherà la propria posizione di equilibrio, ma rimanendo sempre in quella metastabile α_r corrispondente al valore di A raggiunto, e si avvicinerà sempre di più al valore $\alpha_T = \arccos \sqrt[3]{B}$ (grafici rosso, verde e indaco nella figura 6).

Non appena A supera, anche di pochissimo, il valore di $\sqrt{(1 - \sqrt[3]{B^2})^3}$ (grafico marrone nella figura 6 e punto di incontro dei rami verde e arancione nella figura 7), in corrispondenza del quale la posizione di equilibrio metastabile sparisce, il sistema si sposta repentinamente, quasi istantaneamente, nella posizione di equilibrio stabile $-\alpha_a = -\arccos \left(B - \sqrt[3]{B} + \sqrt{\frac{B^3+B}{B+\sqrt[3]{B}}} \right)$. Per valori di A superiori la posizione di equilibrio stabile si abbassa ancora di più (grafici azzurro, giallo e viola nella figura 6).

¹²Un sistema è in condizioni di sovrasmorzamento quando, a causa degli attriti, esso non presenta comportamento inerziale, cioè non accumula energia cinetica per effetto del lavoro delle forze esterne. Un modo semplice per immaginare e modellizzare tale comportamento è considerare le forze proporzionali alla velocità anziché all'accelerazione. Una conseguenza immediata di questa condizione è che il sistema si muove verso la condizione di equilibrio, stabile o metastabile, verso cui spingono le forze esterne, senza oscillare una volta raggiunta tale condizione di equilibrio.

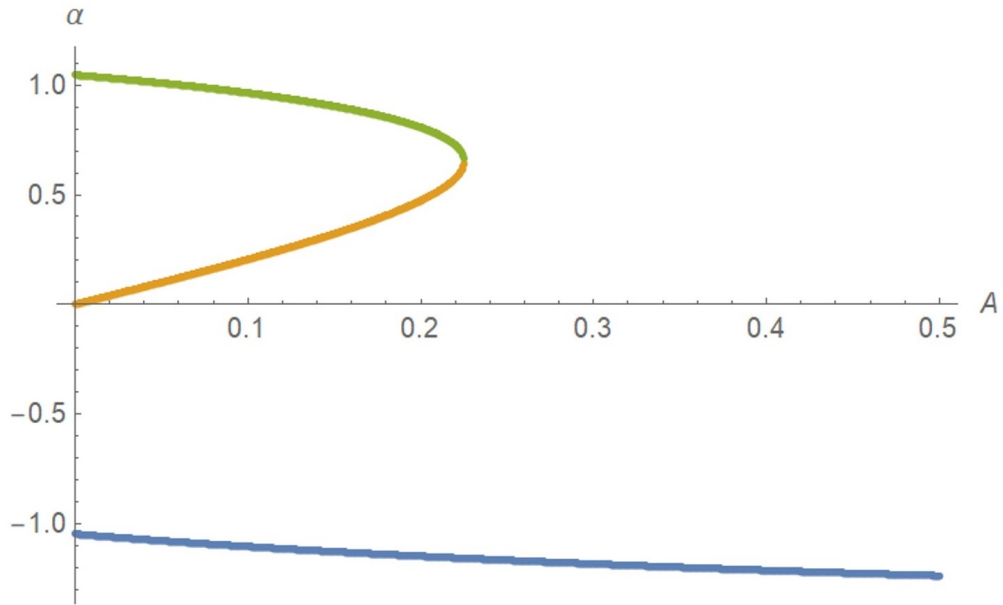


Figura 7: Zeri di $u'(\alpha)$ (con $B = 0.5$), al variare di A da 0 a 0.5.

Il grafico del *moto* del sistema, al variare di A , è ottenibile dalla figura 7 rimuovendo il ramo arancione instabile e la porzione del ramo blu stabile per $A < \sqrt{(1 - \sqrt[3]{B^2})^3}$. Il grafico che si ottiene è il seguente

Emerge quindi una discontinuità nelle posizioni effettive di equilibrio, discontinuità non presente nella descrizione analitica del sistema, in quanto non abbiamo inserito caratteristiche intrinsecamente discontinue come, ad esempio, il carico di rottura dei materiali o altri dettagli simili.

Abbiamo quindi una catastrofe.¹³

Stabilità, instabilità, biforcazione, transizione caotica

Un altro tipo di catastrofe si può verificare nei sistemi che presentano biforcazioni nelle posizioni di stabilità o pseudo-stabilità. È opportuno analizzare direttamente un sistema classico con questo comportamento per capire il significato di questi termini e la possibile occorrenza di questi fenomeni dinamici.

¹³In questo caso, dato il sistema fisico da cui abbiamo tratto le equazioni, questa catastrofe matematica corrisponde anche ad una catastrofe reale: sotto un peso eccessivo il ponte si piegherà verso il basso, cadendo repentinamente nella posizione in figura 3, non certo una bella esperienza per coloro che vi si trovano sopra. Peraltro, se nella transizione si raggiunge anche la situazione di deformazione plastica (cioè la tipologia di deformazione che non viene recuperata una volta eliminata la causa esterna) dei giunti orizzontali, scompare anche la posizione di equilibrio stabile e il ponte si chiude definitivamente precipitando verso il basso.

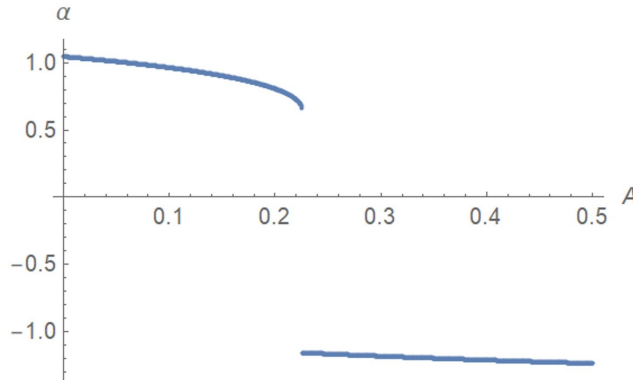


Figura 8: *Moto* della posizione di equilibrio del ponte (con $B = 0.5$), al variare di A da 0 a 0.5.

Consideriamo il più semplice sistema dinamico che descriva l'evoluzione di una popolazione che occupa un territorio con risorse limitate. In un fissato intervallo di tempo Δt , la variazione Δp della popolazione è data dalla somma di due termini:

- Ap , che tiene conto delle nascite e delle morti che avvengono in media nell'intervallo Δt . Queste due variazioni sono entrambe mediamente proporzionali all'entità assoluta p della popolazione mediante il tasso combinato di nascita e morte non violenta A (positivo se le nascite superano le morti, negativo se le morti superano le nascite, nullo se le nascite bilanciano esattamente le morti).
- $-Bp^2$, che tiene conto della competizione interna alla popolazione. Le perdite dovute alla competizione sono proporzionali al numero di scontri che avvengono tra gli individui, e il numero di scontri è mediamente proporzionale al numero di possibili coppie.¹⁴ Il fattore di proporzionalità B è la probabilità che una coppia potenziale si concretizzi in uno scontro competitivo reale nell'intervallo di tempo Δt .

Abbiamo quindi l'equazione di evoluzione

$$\Delta p = Ap - Bp^2$$

Poniamo $p_n = p(n\Delta t)$, allora $\Delta p = p_{n+1} - p_n$ e quindi

$$p_{n+1} = (A + 1)p_n - Bp_n^2 \Rightarrow Bp_{n+1} = (A + 1)Bp_n - (Bp_n)^2$$

¹⁴Il numero di possibili coppie che si possono formare con p elementi è $\frac{1}{2}p(p-1)$. Il fattore $\frac{1}{2}$ possiamo considerarlo inglobato nel coefficiente B e poi approssimiamo $p(p-1)$ con p^2 perché su popolazioni di entità rilevanti la differenza è trascurabile.

Definendo $r = A+1$ e $x_n = Bp_n$ otteniamo l'equazione di evoluzione del sistema dinamico discreto noto come **mappa logistica**¹⁵

$$\begin{cases} x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \\ x_0 \in [0, 1] \wedge r \in [0, 4] \end{cases} \quad (8)$$

I limiti di x_0 e quelli di r , come vedremo meglio più avanti, servono a mantenere i valori di tutti gli x_n in $[0, 1]$:¹⁶ scelte diverse di uno e entrambi questi parametri renderebbero il comportamento del sistema irrealistico, con x che assume valori negativi o che diverge, e anche poco interessante dal punto di vista dell'analisi dinamica.

Possiamo analizzare il comportamento di questo sistema mediante un grafico cartesiano. Rappresentiamo la retta $y = x$ e la parabola $y = rx(1 - x)$ per $x \in [0, 1]$ e $0 < r < 1$. La dinamica può essere sviluppata graficamente direttamente su questo grafico (figura 9):

- Consideriamo sull'asse delle ascisse il valore iniziale x_0 .
- Per determinare x_1 tracciamo la retta verticale $x = x_0$ fino ad incontrare il grafico della parabola e poi da questa intersezione tracciamo un segmento orizzontale fino all'asse delle ordinate.
- Il valore dell'ordinata così individuato corrisponde a x_1 in quanto, per definizione di grafico di una funzione, è il valore che si ottiene sostituendo x_0 a x nel polinomio $rx(1 - x)$.
- Quindi riportiamo tale valore sull'asse delle ascisse per ripetere l'operazione e ottenere x_2 , poi x_3 e così via.

Possiamo modificare questa procedura per renderla più veloce e più efficace. La retta $y = x$ contiene tutti i punti con ordinata e ascissa uguali, quindi se interrompiamo il segmento orizzontale quanto esso incontra questa retta, avremo già un punto con l'ascissa x_1 che serve compiere il successivo passo. Se da questo punto ci spostiamo in verticale fino ad incontrare nuovamente la parabola individuiamo lo stesso punto che si otterrebbe partendo dall'asse delle ascisse dal valore x_1 . Quindi possiamo riprendere a spostarci in orizzontale fino ad incontrare nuovamente la retta e così via (figure 10 e 11). In breve:

- si parte dal punto $(x_0, 0)$ sull'asse delle ascisse;
- si prosegue in verticale fino ad incontrare la parabola di equazione $y = rx(1 - x)$ nel punto (x_0, x_1) ;

¹⁵La mappa logistica è spesso definito *modello giocattolo*: la sua equazione è talmente semplificata da non descrivere adeguatamente nessun sistema reale, tuttavia presenta tutte le caratteristiche più importanti dei sistemi dinamici non lineari, in particolare in relazione alla teoria delle biforcazioni, alla teoria delle catastrofi e alla teoria del caos. Condivide questa caratteristica con le **equazioni di LORENZ**, che derivano da una semplificazione estrema della descrizione dei moti convettivi in un fluido. Che anche sistemi così semplificati presentino comportamenti catastrofici e caotici è il segno, se non la dimostrazione, che l'instabilità è una caratteristica intrinseca del mondo che ci circonda.

¹⁶Il massimo di $x_n(1 - x_n)$ si ha per $x_n = \frac{1}{2}$, in corrispondenza del quale $x_n(1 - x_n) = \frac{1}{4}$. Quindi limitando r in $[0, 4]$ si ha la certezza che se $x_n \in [0, 1]$ allora anche $x_{n+1} \in [0, 1]$.

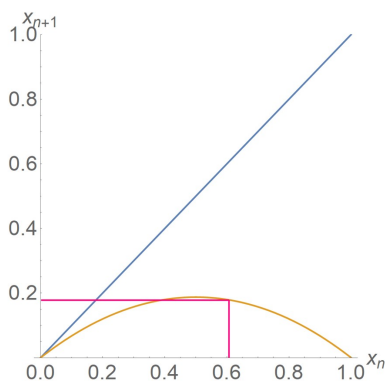


Figura 9: Individuazione grafica di x_1 sull'asse delle ordinate partendo da x_0 sull'asse delle ascisse. La parabola è disegnata per $r = 0.75$.

- si prosegue in orizzontale fino ad incontrare la retta di equazione $y = x$ nel punto (x_1, x_1) ;
- si prosegue in verticale fino ad incontrare la parabola di equazione $y = rx(1 - x)$ nel punto (x_1, x_2) ;
- si prosegue in orizzontale fino ad incontrare la retta di equazione $y = x$ nel punto (x_2, x_2) ;
- e così via...

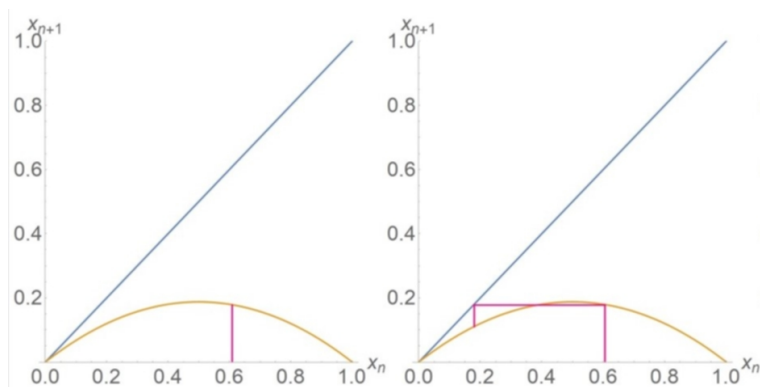


Figura 10: Esempio di implementazione grafica della dinamica per un sistema con $r = 0.75$ (primi due passi).

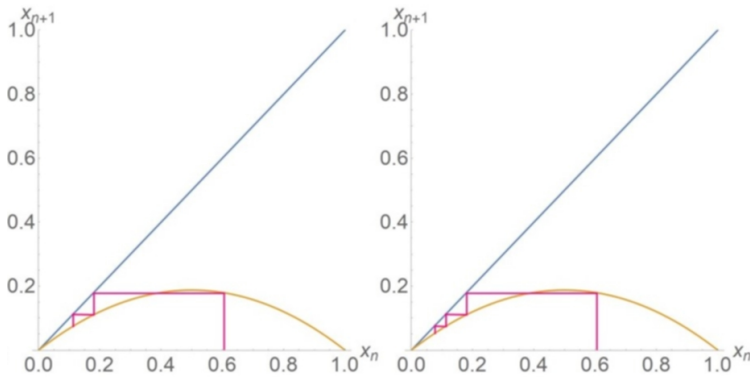


Figura 11: Esempio di implementazione grafica della dinamica per un sistema con $r = 0.75$ (passi successivi).

Nel rappresentare questa procedura abbiamo scelto $r \in [0, 1]$, valori per cui la parabola non interseca la retta in nessun punto di ascissa non nulla. Come è facile dedurre dalle immagini, in questo caso, qualsiasi sia il punto di partenza, la dinamica procede verso il punto $(0, 0)$ per cui si ha asintoticamente $x = 0$ sempre (per $r = 0$ il valore $x = 0$ viene raggiunto dopo il primo passo della dinamica). Questo valore, per questi valori del parametro r , è un punto di equilibrio stabile: se si parte da $x = 0$ il sistema resta indefinitamente in questo valore, se si parte da un diverso valore di x (purché in $[0, 1]$) la dinamica converge sempre a questo valore in modo esponenziale (figura 12).

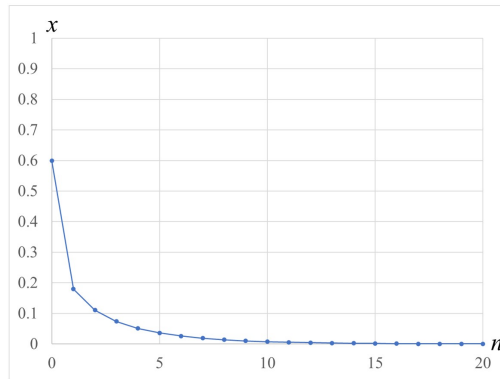


Figura 12: Grafico dell'evoluzione di x al variare di n per $r = 0.75$.

Quando r supera 1 compare una intersezione tra retta e parabola con ascissa non nulla e le cose si fanno più interessanti. Se $1 < r = 2$ c'è una seconda intersezione tra retta e parabola ma il vertice della parabola si trova ancora al di sotto della retta. Iterando graficamente la dinamica come visto in precedenza otteniamo le possibili evoluzioni in figura 13.

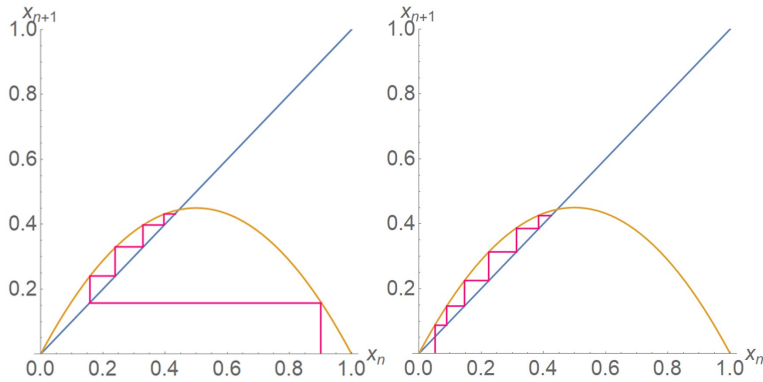


Figura 13: Esempi di implementazione grafica della dinamica per un sistema con $r = 1.8$.

Il punto $x = 0$ è ora di equilibrio instabile, in quanto il sistema resta immediatamente bloccato a tale valore solo se $x_0 = 0 \vee x_0 = 1$, ma per qualunque $x_0 \in]0, 1[$ il sistema evolve rapidamente (anche qui in modo esponenziale, dopo un eventuale transiente) verso l'altra intersezione tra la retta e la parabola, il cui valore è la soluzione non banale dell'equazione $rx(1-x) = x \Rightarrow x = \frac{r-1}{r}$ (figura 14).

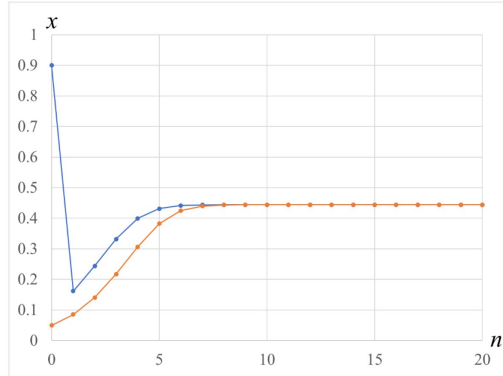


Figura 14: Grafico dell'evoluzione di x al variare di n per $r = 1.8$.

Se $2 < r = 3$ c'è sempre una sola intersezione non banale tra retta e parabola, ma ora il vertice della parabola si trova al di sopra della retta (cioè la sua ascissa è compresa tra quelle delle due intersezioni). Questo comporta una prima variazione significativa nel comportamento del sistema (figura 15).

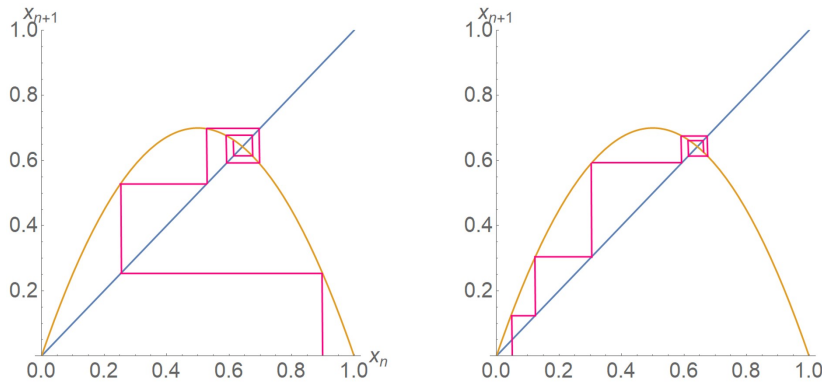


Figura 15: Esempi di implementazione grafica della dinamica con $r = 2.8$.

L'avvicinarsi al punto di equilibrio stabile $x = \frac{r-1}{r}$ non avviene più con una convergenza esponenziale: dopo alcuni primi passi esponenziali, si innescano delle oscillazioni smorzate che portano il sistema all'equilibrio (figura 16).

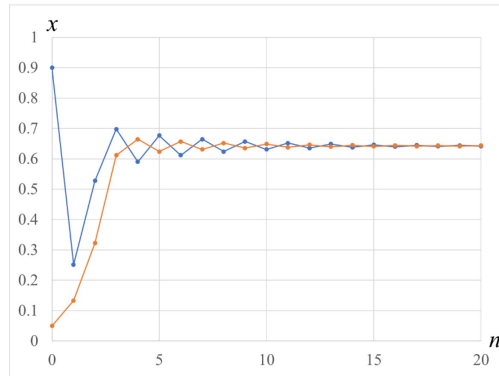
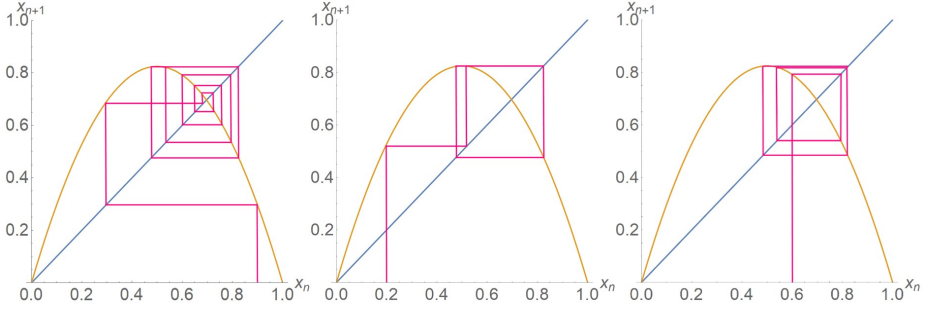
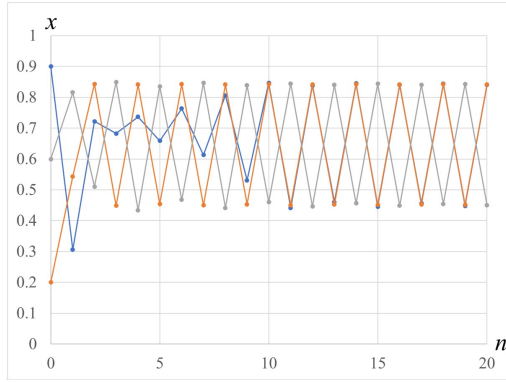


Figura 16: Grafico dell'evoluzione di x al variare di n per $r = 2.8$.

Se $r > 3$ la situazione sembrerebbe essere identica a quella appena analizzata, in quanto dal punto di vista grafico abbiamo solo l'ulteriore innalzarsi del vertice della parabola rispetto alla retta. Eppure, superato il valore $r = 3$, anche il punto $x = \frac{r-1}{r}$ diviene un punto di equilibrio instabile: qualunque sia il valore di partenza, purché diverso da 0, 1 e $\frac{r-1}{r}$, la traiettoria spezzata sul piano cartesiano evolve verso un quadrato su cui il sistema si adagia senza più trovare un punto di stasi (figura 17). Abbiamo quello che nella teoria dei sistemi dinamici si chiama ciclo limite. In particolare il sistema oscilla tra due valori fissi e indipendenti dalla posizione iniziale (figura 18).

Il perché di questo comportamento può essere compreso costruendo una mappa


 Figura 17: Esempi di implementazione grafica della dinamica con $r = 3.3$.

 Figura 18: Grafico dell'evoluzione di x al variare di n per $r = 3.4$.

a due passi. Se consideriamo la mappa logistica per x_{n+1} e x_{n+2} abbiamo

$$\begin{cases} x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \\ x_{n+2} = rx_{n+1}(1 - x_{n+1}) \\ x_0 \in [0, 1] \wedge r \in [0, 4] \end{cases}$$

Sostituendo l'espressione equivalente a x_{n+1} data dalla prima equazione nella seconda, abbiamo

$$\begin{cases} x_{n+2} = r^2 x_n(1 - x_n)(rx_n^2 - rx_n + 1) \\ x_0 \in [0, 1] \wedge r \in [0, 4] \end{cases} \quad (9)$$

Procedendo ora ad una rappresentazione grafica di questa equazione di evoluzione, in modo simile a quanto fatto prima, otteniamo i grafici nelle figure 19 e 20 in corrispondenza dei diversi valori di r .

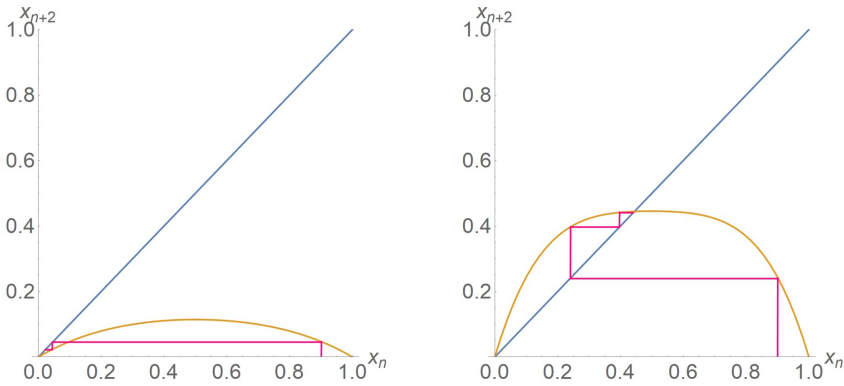


Figura 19: Implementazione grafica della dinamica a due passi con $r = 0.75, 1.8$.

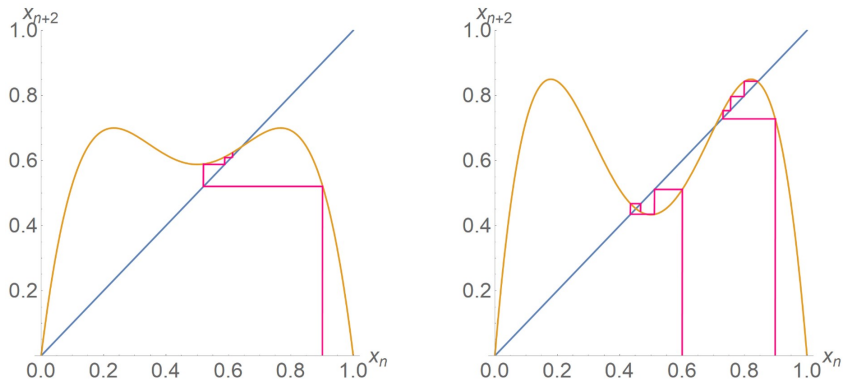


Figura 20: Implementazione grafica della dinamica a due passi con $r = 2.8, 3.4$.

Vediamo quindi che per $r > 3$ la curva quartica presente nell'equazione della dinamica a due passi interseca la retta in quattro punti, di cui due (le intersezioni già presenti tra retta e parabola, 0 e $\frac{r-1}{r}$) sono di equilibrio instabile e due (le intersezioni esclusive della quartica, $x_{\pm} = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}$) sarebbero di equilibrio stabile se la dinamica reale fosse quella descritta dalla (9). Ma dato che, in realtà, la dinamica a un passo è quella determinata dalla parabola (8), accade che a partire da ciascuno dei due valori il sistema viene proiettato nell'altro e viceversa:

$$rx_-(1-x_-) = x_+ \wedge rx_+(1-x_+) = x_-$$

Continuando ad aumentare r , e al superamento di soglie sempre più vicine tra loro, si realizzano altre transizioni del genere, e il sistema raddoppia il numero di valori tra cui oscilla asintoticamente. Dopo la seconda transizione il sistema comincia ad oscillare tra quattro valori (figura 21).

e successivamente le oscillazioni stazionarie avvengono tra 8 valori, 16, 32 e così via.

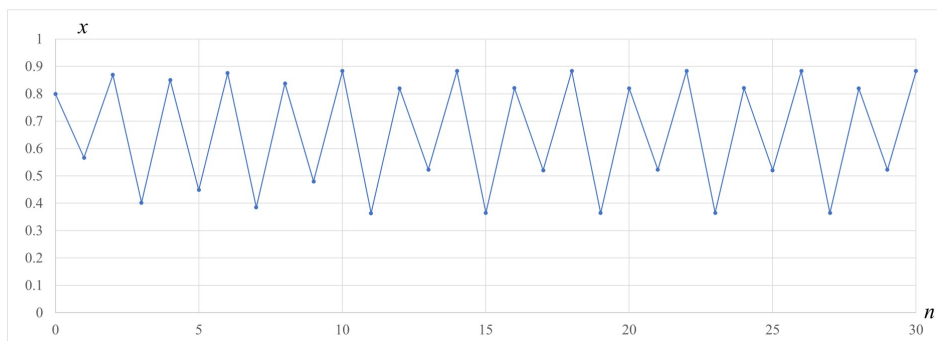


Figura 21: Grafico dell'evoluzione di x al variare di n per $r = 3.54$.

A questo punto è necessario ricorrere ad un approccio diverso per studiare l'evoluzione dello stato asintotico al variare di r .

Costruiamo un grafico su un piano cartesiano in cui le ascisse sono i valori di r e le ordinate quelli di x . Poi facciamo svolgere la dinamica per un numero molto elevato di passi, e tagliamo via il transiente iniziale in modo da essere abbastanza vicino allo stato asintotico.¹⁷ Infine rappresentiamo, sul piano cartesiano rx , in corrispondenza di ogni valore di $r \in [0, 4]$, tutti i valori di x successivi al transiente ottenuti dalla dinamica per quello specifico valore di r . In tal modo avremo una rappresentazione unica di tutti gli stati asintotici del sistema. Procedendo in tal modo otteniamo il diagramma in figura 22.

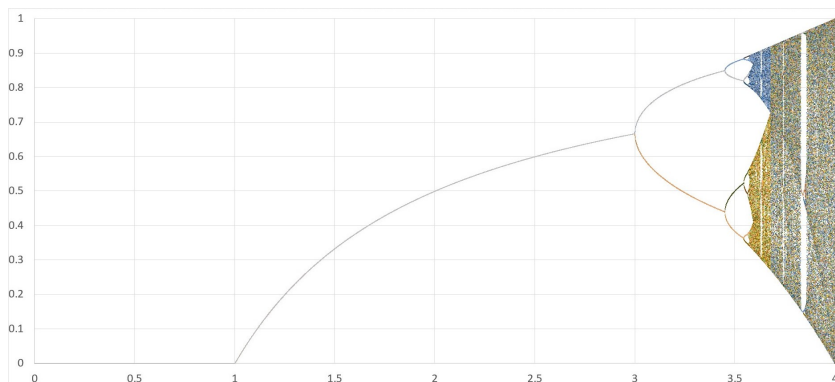


Figura 22: Diagramma di biforcazione completo della mappa logistica.

Possiamo osservare quanto già dedotto in precedenza:

- Fino a $r = 1$ abbiamo $x = 0$ come stato di equilibrio stabile.

¹⁷Questo taglio è sempre possibile eseguirlo in modo efficace tagliando via uno stesso, e non troppo elevato, numero di passi per ogni valore di rf , dato che la dinamica iniziale, come abbiamo visto, ha una convergenza esponenziale verso lo stato asintotico.

- Per $1 < r = 3$ abbiamo ancora un unico punto di equilibrio stabile che però non coincide più con 0 e che dipende da r .
- Dopo $r = 3$ il punto di equilibrio diverso da 0 perde la stabilità e abbiamo una prima transizione (che da ora chiameremo biforcazione perché sul diagramma rx abbiamo una separazione della curva in due rami) corrispondente allo stato asintotico oscillante tra due valori.
- Successivamente ci sono nuove biforcazioni e il sistema oscilla asintoticamente tra 4 valori, poi tra 8 e così via.
- Gli intervalli di r che separano una biforcazione dall'altra si riducono sempre di più.

Tuttavia osserviamo anche dei comportamenti *anomali*: dopo questa successione di biforcazioni osserviamo delle strisce verticali di punti che riempiono in modo fitto alcune zone del piano cartesiano. Ingrandiamo il grafico in modo da visualizzare solo ciò che accade per valori di r successivi a poco prima della seconda biforcazione (figura 23).

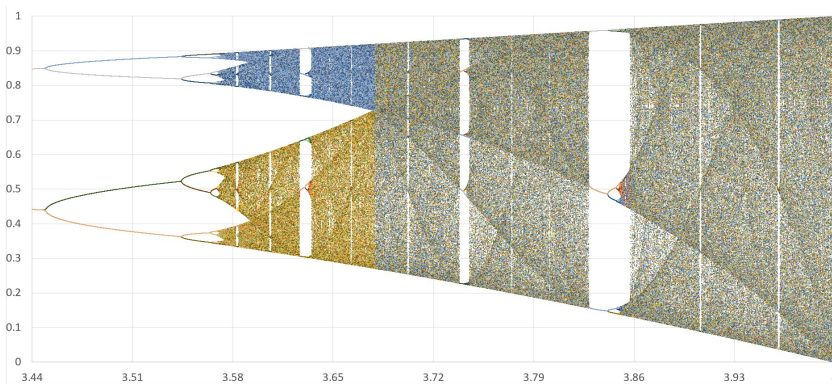


Figura 23: Diagramma di biforcazione della mappa logistica per $3.44 \leq r \leq 4$.

Le strisce dense di punti corrispondono a valori di r per cui il sistema non raggiunge nessuno stato stazionario, né di equilibrio né di ciclo limite con un numero finito di punti, ma continua ad evolvere in modo disordinato attraversando in modo ergodico (cioè passando arbitrariamente vicino ad ogni punto di un intervallo continuo di valori). Abbiamo quindi una transizione al caos. L'evoluzione non ha più uno stato asintotico sempre uguale (seppur non stazionario) ma resta fortemente dipendente dalla condizione iniziale: a condizioni iniziali simili corrispondono evoluzioni molto diverse.

Osserviamo però che lo stato asintotico caotico non caratterizza tutti i valori di r successivi alla transizione caotica: dopo una prima transizione (che avviene per $r \approx 3.56995$) compaiono altri intervalli (le strisce quasi completamente bianche nel diagramma) in cui il sistema ha uno stato asintotico che torna ad essere ciclico tra un

numero definito di valori. Ci sono quindi delle isole di stabilità, in cui il sistema perde le sue caratteristiche caotiche.

Tuttavia anche in queste isole di stabilità accade qualcosa di anomalo. Ingrandendo l'isola più grande, quella compresa tra 3.82 e 3.86 (ma la stessa cosa accade anche in tutte le altre), otteniamo i grafici nella figura 24 (nel primo le ordinate coprono l'intero intervallo $[0,1]$ mentre nel secondo c'è anche un ingrandimento verticale in modo da visualizzare solo una porzione dell'isola di stabilità).

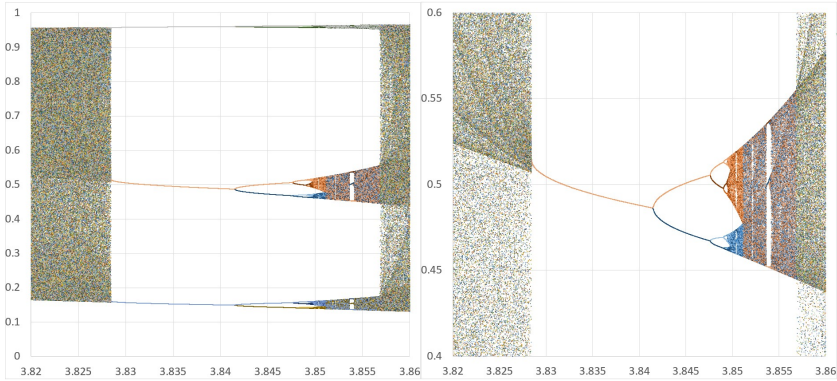


Figura 24: Diagramma di biforcazione della mappa logistica per $3.82 \leq r \leq 3.86$, a destra le ordinate sono limitate a $[0.4, 0.6]$.

All'interno dell'isola di stabilità compare un diagramma di biforcazione sostanzialmente identico a quello intero visualizzato nella figura 22. Quindi, dal punto di vista geometrico, il diagramma di biforcazione 22 presenta gli aspetti di autosomiglianza tipici delle figure frattali,¹⁸ dal punto di vista dell'evoluzione dinamica, al variare del parametro r , osserviamo la presenza di equilibrio, cicli limite e caos (ciascuno dei quali presenta differenze qualitative drastiche rispetto agli altri comportamenti asintotici) che non solo si alternano tra loro, ma si presentano anche innestati uno dentro l'altro in proporzioni geometriche diverse e annidamenti infiniti: il sistema oscilla continuamente tra questi possibili stati asintotici senza mai assestarsi su uno di essi, fosse anche solo quello caotico, e presentando, in ogni tipologia di stato asintotico, innesti caratteristici degli altri.

Un'altra cosa interessante da notare è che queste caratteristiche non dipendono strettamente dalla forma funzionale della mappa logistica. Qualsiasi sistema dinamico discreto descritto da

$$\begin{cases} x_{n+1} = rf(x_n) \\ x_0 \in [0, 1] \wedge r \in [0, 4] \end{cases} \quad (10)$$

con f funzione reale tale che $f(0) = f(1) = 0$, $f(x) \geq 0$ in $[0, 1]$, che presenta un solo massimo in $[0, 1]$ pari a $\frac{1}{4}$, ha associato un diagramma di biforcazione, sebbene le caratteristiche specifiche di tale diagramma dipendano dalla forma del grafico di f .

¹⁸Non è difficile cogliere delle analogie tra questo diagramma e il triangolo di SIERPINSKI.

Di seguito possiamo vedere quattro diverse curve del tipo descritto con i corrispondenti diagrammi di biforcazione (figure 25, 26, 27 e 28).

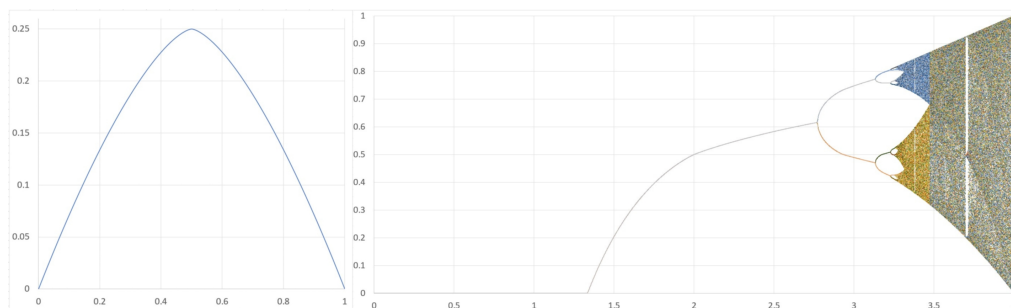


Figura 25

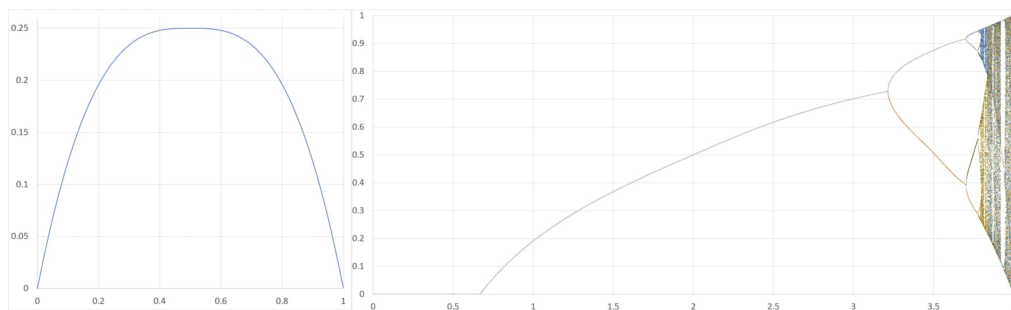


Figura 26

Questi esempi mostrano l'universalità di questi fenomeni, che sono ubiquitari in tutti i processi dinamici, anche in quelli più semplici.

Interpretazione *Catastrofica* della Dialettica Hegeliana

Il pensiero filosofico di HEGEL e la **Teoria delle Catastrofi** possono essere intrecciate per fornire una visione unica del legame tra quantità e qualità.

Nella **Teoria delle Catastrofi** sono stati introdotti concetti come **catastrofe** e **punto di biforcazione** per descrivere cambiamenti drastici e non lineari in risposta a variazioni nelle variabili del sistema. Questi concetti possono essere applicati in modo efficace per interpretare la dinamica di transizione tra quantità e qualità all'interno del quadro hegeliano.

Immaginiamo la **Quantità** come una variabile continua che si accumula gradualmente. Secondo HEGEL, quando questa quantità raggiunge una soglia critica, si verifica una trasformazione improvvisa che si traduce in una nuova qualità. La **Teoria delle Catastrofi** suggerisce che questo passaggio da una fase all'altra potrebbe

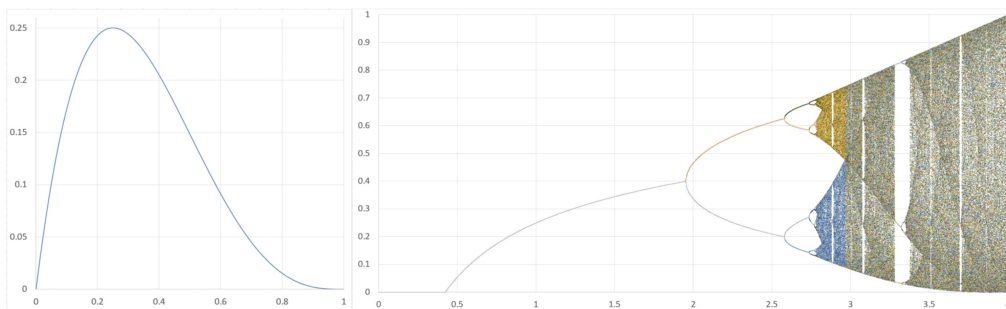


Figura 27

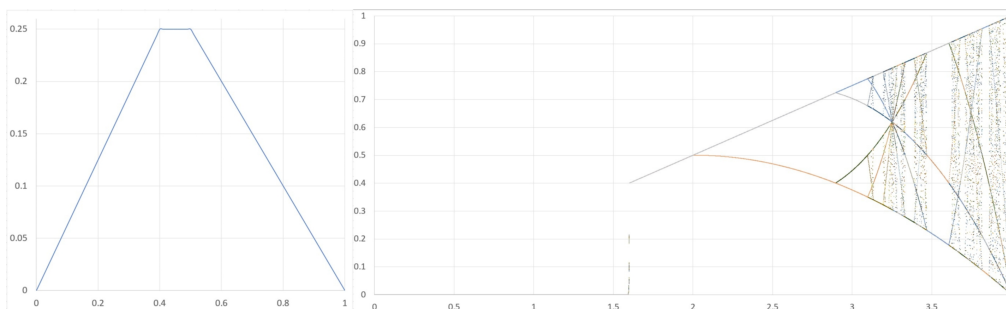


Figura 28

essere rappresentato come una catastrofe, un punto critico in cui il sistema cambia in modo repentino e imprevedibile. Come abbiamo visto, la **Teoria delle Catastrofi** offre un quadro per comprendere come piccoli cambiamenti in una o più variabili nel tempo possono portare a **catastrofi**, o cambiamenti drastici e improvvisi nel comportamento di un sistema. Questo è analogo al concetto hegeliano di **salto qualitativo/dialettico**, in cui un cambiamento quantitativo sufficientemente grande può portare a un cambiamento qualitativo.

La **Teoria delle Biforcazioni**, d'altra parte, studia le condizioni di un sistema dinamico in cui esso subisce un cambiamento strutturale. In questa interpretazione, il punto di biforcazione corrisponde al momento critico in cui la quantità raggiunge il suo massimo e scatena una transizione qualitativa. Questo può essere visto come un altro esempio di **salto qualitativo/dialettico**, in cui un cambiamento quantitativo (in questo caso di un parametro) porta a un cambiamento qualitativo nel comportamento del sistema.

La **Teoria delle Catastrofi** e la **Teoria delle Biforcazioni** possono quindi essere viste come estensioni matematiche del concetto hegeliano di dialettica, in cui la tesi e l'antitesi si scontrano per formare una sintesi. Nel contesto della TdC, la tesi è lo stato attuale del sistema, l'antitesi è il cambiamento quantitativo, e la sintesi è il nuovo stato del sistema dopo il **salto qualitativo** o la **catastrofe**. Nel contesto della TdB la tesi

è l'evoluzione del sistema per valori del parametro (dei parametri) che determinano stati asintotici in linea con l'intuizione (singolo stato di equilibrio o stazionario), l'antitesi è l'attraversamento dei valori critici del parametro oltre i quali la struttura dello stato asintotico cambia radicalmente, si biforca più volte, poi diventa caotico, recupera un ordine con maggiori biforcazioni e così via, in un continuo percorso avanti e indietro tra il caos e l'ordine, come nel processo dialettico a spirale hegeliano.

In conclusione, l'analisi dei concetti hegeliani di **Quantità** e **Qualità** alla luce della **Teoria delle Catastrofi** fornisce un approccio affascinante per esplorare il cambiamento e lo sviluppo nei sistemi complessi. L'integrazione di questi due approcci, filosofico e matematico, offre una comprensione più approfondita della relazione tra quantità e qualità, invitandoci a riflettere sulla natura non lineare e imprevedibile dei processi evolutivi nella realtà.

Queste elaborazioni teoretiche forniscono un quadro potente per comprendere il legame tra quantità e qualità, e come i cambiamenti quantitativi possono portare a cambiamenti qualitativi.

Bibliografia

- [1] ARNOL'D V. I., **Teoria delle Catastrofi**, Bollati Boringhieri, 2014.
- [2] BENEDETTO D., CAVALLARO G., **La Matematica delle Catastrofi**, presentazione nell'ambito del PLS del Dipartimento di Matematica dell'Università La Sapienza di Roma, 2010.
<http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/PLS/PLS-CATASTROFI/Catastrofi.pdf>
- [3] COMPAGNONE D., **La categoria della quantità in HEGEL**, *Consecutio Temporum - Rivista critica della postmodernità*, n. 17, Luglio 2020.
- [4] PHILOSOPHY STACK EXCHANGE, **Do you agree with Hegel's assertion: quantity changes lead to quality changes?**
<https://philosophy.stackexchange.com/questions/3430/do-you-agree-with-hegels-assertion-quantity-changes-lead-to-quality-changes>
- [5] PHILOSOPHY STACK EXCHANGE, **What does Hegel mean by Quality?**
<https://philosophy.stackexchange.com/questions/882/what-does-hegel-mean-by-quality>
- [6] POLSETTI M., **Sul concetto di misura in HEGEL**, *Consecutio Temporum - Rivista critica della postmodernità*, n. 13, Luglio 2018.
- [7] VULPIANI A., **Determinismo e Caos**, *La Nuova Italia*, 1994.

Le curve e lo spazio

Curves and space

Sergio Saverino ¹

Abstract

Some mathematical curves are very common in astronomy, but also in reality in general. They seem to be shapes that structure space

Coniche

Il moto di un corpo all'interno di un campo gravitazionale è determinato dalla relazione newtoniana:

$$G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \ddot{\vec{r}}$$

dove $\ddot{\vec{r}}$ indica la derivata seconda della posizione rispetto al tempo, cioè l'accelerazione.

Si tratta di un'equazione differenziale vettoriale e che, quindi, presenta qualche difficoltà. La soluzione è:

$$r = \frac{e \cdot f}{1 - e \cdot \cos(\vartheta + \varphi)}$$

cioè l'espressione di una conica nelle coordinate polari (r, ϑ) , con eccentricità $e = \frac{c}{a}$ con c semidistanza focale e a semiasse.

Per $0 < e < 1$ si hanno ellissi cioè le orbite dei pianeti, per $e > 1$ iperboli, la traiettoria di comete aperiodiche, cioè corpi che passano vicino al Sole una sola volta.

Interessante il caso $e = 1$, la parabola ($e = \frac{c}{a}$ con c ed a che tendono all'infinito e sono dello stesso ordine) che si può immaginare come un'ellissi fortemente eccentrica (la cometa di Halley ha un periodo di 76 anni).

¹s.savarino@tiscali.it - Mathesis Roma

Curvatura

La Relatività Generale impone un vero cambio di paradigma rispetto alla fisica newtoniana. La presenza di una massa condiziona la traiettoria di un corpo non più per via di una forza che agisce a distanza, ma perché crea una “curvatura dello spazio-tempo”. Un raggio di luce descrive un ramo di iperbole di grande eccentricità.

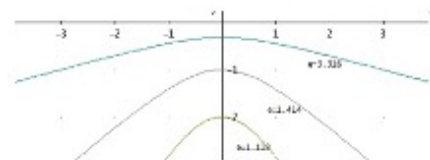


Figura 1: Grafica Derive 6 Un ramo d’iperbole di forte eccentricità dà idea del percorso di un raggio di luce che passa accanto a una grande massa.

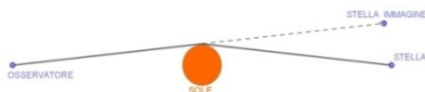


Figura 2: Grafica GeoGebra Nel 1919, durante un’eclissi di Sole, Eddington misurò una devi-azione di 1.75”, in accordo con le previsioni della Relatività.

Spirali e buchi neri

Oggetti in moto vicino a un grande corpo attrattore difficilmente si pongono su un’orbita stabile, un’ellisse, è più probabile che si perdano nello spazio, iperbole, o che vi cadano dentro.

Il moto è di tipo rotatorio ma anche di caduta. La combinazione dei due dà luogo a una traiettoria a spirale.

Studiata da Cartesio nel 1600, la spirale logaritmica ha equazione:

$$\rho = k \cdot e^{\vartheta}$$

Da non confondere con la spirale archimedeana di equazione:

$$\rho = k \cdot \theta$$

studiata da Archimede già nel terzo secolo a.C., con k numero reale, e (ρ, ϑ) coordinate polari.

Come le coniche, queste curve ricorrono nella realtà, diventano simboli e categorie del pensiero.

Il lituo e il buco nero

Un buco nero è un oggetto astronomico estremamente massiccio, tanto che nemmeno la luce può uscire dalla zona delimitata dal cosiddetto “orizzonte degli eventi”. Tutto intorno orbita il cosiddetto “disco di accrescimento” (fig. 6), materiale che gli ruota tanto più veloce quanto più è vicino all’orizzonte degli eventi, quindi c’è un forte

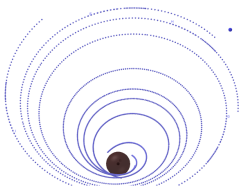


Figura 3: Grafica Geogebra



Figura 4: CNR, Telescopio Hubble

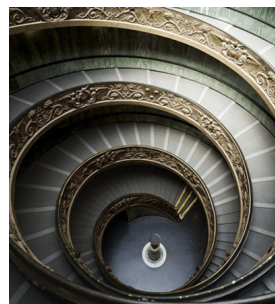


Figura 5:
www.museivaticani.va

attrito fra le parti del disco e un surriscaldamento che lo rende incandescente. Il disco di accrescimento emette luce che arriva a un ipotetico osservatore. Un raggio che parte dalla parte opposta del buco nero non dovrebbe arrivare all'osservatore, perché coperto da un disco nero, invece la situazione è quella rappresentata in Fig.7.



Figura 6: Rai Scuola

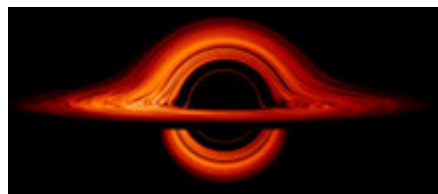


Figura 7: Wired Italia La luce che si origina dall'anello di accrescimento, dalla parte opposta dell'osservatore, segue un percorso del tipo "lituo matematico", e arriva all'osservatore "scavalcando" il disco nero.

Luce e paradigmi

"Ho paura del buio e della luce non mi fido" - Woody Allen.

Un raggio di luce sembra quanto di più vicino all'idea di retta euclidea. Ma, come si è visto, su scala astronomica non è così. Può arrivare a noi descrivendo un'iperbole, oppure, addirittura, può "scavalcare" il disco opaco di un buco nero. La Relatività Speciale afferma l'equivalenza fra energia e massa, quindi i "fotoni", che non hanno massa ma hanno energia, sentono l'attrazione gravitazionale. La Relatività Generale, invece, dà un quadro diverso, imponendo un vero cambio di paradigma, la massa "curva" lo spazio-tempo, determinando le traiettorie.

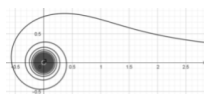


Figura 8:
Grafica GeoGebra
Lituo, curva $\rho = \frac{1}{\vartheta^2}$ Percorso della
luce in prossimità
di un buco nero,
il cerchio nero al
centro. La luce ar-
riva all'osservato-
re "scavalcando" il
buco nero.



Figura 9: iStock
by Getty Images Il
punto di vista dell'
osservatore

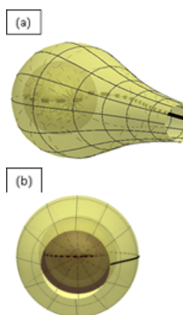


Figura 10:
Grafica GeoGebra
Il buco nero come
apparirebbe (b) a
un osservatore, po-
sto come in fig.9



Figura 11: Media
INAF Buco nero
M87 foto del 2019

“Un paradigma è un insieme di strumenti ... comprende tre elementi ...: ... leggi della fisica formulate matematicamente; un insieme di figure(mentali,verbal, disegni)che ci permettono di comprendere ... e di comunicare ... e una serie di modelli, calcoli e problemi risolti in passato” ... ” - K. Thorne (Nobel 2017)

Bibliografia

- [1] T. Kuhn, La struttura delle rivoluzioni scientifiche, Einaudi, Torino, 1978
- [2] R. B. Leighton, Principles of Modern Physics, McGraw-Hill, Tokyo, 1959
- [3] K. Thorne, Buchi neri e salti temporali, Castelvechi, Torino, 2013

Migliorare l'alfabetizzazione scientifica e le competenze di laboratorio degli studenti delle scuole secondarie: venti anni del Piano Lauree scientifiche

Improving the scientific literacy and laboratory skills of secondary school students: twenty years of "Piano Lauree scientifiche"

Italo Testa ¹

Abstract

Viene presentata una retrospettiva del Piano Lauree Scientifiche a vent'anni dalla sua istituzione. Il Progetto, che vedeva inizialmente anche la partecipazione di Confindustria, era inizialmente finalizzato a contrastare la costante diminuzione, a partire dalla fine degli anni 90, delle iscrizioni degli studenti delle scuole secondarie di secondo grado ai corsi di laurea di Chimica, Matematica, Fisica, Scienze dei Materiali. Dal punto di vista scientifico, gli obiettivi principali sono stati: migliorare la conoscenza dei contenuti scientifici e la percezione della natura della scienza attraverso attività di laboratorio che coinvolgessero attivamente gli studenti; migliorare le competenze dei docenti sulle attività di laboratorio con particolare attenzione sia agli aspetti contenutistici che metodologici; aiutare gli studenti a prendere coscienza delle proprie conoscenze scientifiche e dei curricula universitari; approfondire argomenti scientifici per gli studenti più motivati. In questo articolo ci soffermeremo soprattutto sulle attività di laboratorio svolte presso il Dipartimento di Fisica di Napoli in questi 20 anni, traendo un bilancio del progetto.

Introduzione

Il Progetto Lauree Scientifiche, in seguito divenuto Piano Lauree Scientifiche, nasce agli inizi del 2000 per contrastare la “Crisi della vocazione scientifica”. Verso la fine

¹italo.testa@unina.it

degli anni Novanta e la prima decade del nuovo millennio i corsi di laurea delle scienze di base, Chimica, Fisica e Matematica, ebbero un crollo delle immatricolazioni non solo in Italia, ma in tutta Europa (si pensi che dal 1989 al 2000 le immatricolazioni in chimica, fisica e matematica calarono del 43%, 56% e 63% rispettivamente). Un fenomeno particolarmente grave se si tiene conto del ruolo di “volano economico” al tempo rappresentato dalla ricerca e l’innovazione scientifico-tecnologica. In Italia, la colpa di tale crisi fu imputata in parte alla lunga tradizione secondo la quale le discipline umanistiche erano le uniche in grado di presiedere la formazione degli studenti attraverso metodi d’insegnamento che ancora ora privilegiano le nozioni teoriche e i concetti astratti, mentre la didattica laboratoriale era ritenuta più confacente agli istituti tecnici e professionali che preparano al lavoro. Da ciò iniziò una fuga tuttora in atto degli studenti dagli istituti professionali e tecnici verso i licei. Una conferma indiretta di questa scarsa attenzione verso le materie scientifiche arrivò qualche tempo dopo, quando le indagini OCSE-PISA 2003 e 2006 riportarono risultati deludenti degli studenti italiani nelle prove di matematica, scienze e risoluzione dei problemi.

Per comprendere meglio questo calo delle immatricolazioni, agli studenti partecipanti ai Giochi della Fisica, ai Giochi della Chimica e alle Olimpiadi della Matematica del 2006 fu distribuito un questionario di valutazione, volto a rilevare le loro opinioni sugli studi universitari di fisica, chimica e matematica. In sintesi, emerse che, per superare la crisi della vocazione scientifica, sarebbe stato necessario aumentare le ore di laboratorio a scuola e avere la possibilità di fare “stage” presso università e laboratori di ricerca. In altre parole, gli studenti mettevano in evidenza una loro carenza formativa: mancava loro la percezione di cosa significasse fare il fisico, il chimico o il matematico. Per rispondere a questa istanza, fu avviato il Progetto Lauree Scientifiche.

Sin dal suo esordio, quindi, il Progetto Lauree Scientifiche non mirava solo a fare aumentare le immatricolazioni per i corsi di laurea delle scienze di base, ma si poneva come obiettivi principali quello di aumentare la diffusione della cultura scientifica all’interno delle scuole superiori coinvolgendo gli studenti degli ultimi tre anni in attività di orientamento e di laboratorio e quello di potenziare la formazione degli insegnanti favorendo attività di ricerca/formazione sul campo. In particolare, si enfatizzava l’insegnamento di alcuni aspetti della Natura della Scienza come l’indagine scientifica [1-3] e la modellizzazione matematica [4]. Le attività del Progetto furono sottoposte ad una prima valutazione nel 2007 [5-6], mostrando un impatto significativo delle attività di laboratorio sulle opinioni degli studenti su Chimica, Matematica e Fisica. Sulla base di tali risultati incoraggianti ottenuti nella prima implementazione, l’allora Ministero dell’Istruzione Università e Ricerca trasformò il Progetto in Piano, rafforzandone l’impianto complessivo ed estendendolo ad altri settori disciplinari, come la Statistica, anticipando di fatto quello che poi sarebbe diventato l’ambito disciplinare che oggi chiamiamo STEM (Science – Technology – Engineering – Mathematics). Furono inoltre rinnovate le linee guida delle attività, identificando come priorità i cosiddetti Laboratori PLS, divisi in tre tipologie:

- laboratori di approfondimento: riguardavano gli studenti più motivati e capaci. Questi laboratori richiedevano impegno e abilità maggiori, e potevano collegarsi

con la preparazione di gare ed olimpiadi;

- laboratori di avvicinamento alle discipline scientifiche: offrivano agli studenti l'esperienza di fenomeni e di problemi matematico-scientifico-tecnologici significativi, collegati con la ricerca, con l'esperienza quotidiana, o con il mondo del lavoro;
- laboratori di autovalutazione: sono finalizzati al miglioramento della preparazione richiesta dai corsi di laurea di indirizzo scientifico. Questi laboratori offrono agli studenti la possibilità di affrontare problemi e situazioni di apprendimento simili a quelli che incontreranno nei corsi universitari, stimolandoli a riflettere sulla loro preparazione.

Nella sezione seguente descriviamo in maggior dettaglio i tre tipi di laboratori che ancora oggi sono realizzati nell'ambito del PLS Fisica. Successivamente presentiamo due percorsi didattici emblematici realizzati nell'ambito di edizioni passate del PLS Fisica. Infine, trarremo qualche conclusione da questi venti anni di implementazione del progetto.

Le attività PLS Fisica

I laboratori PLS di approfondimento

I laboratori di approfondimento mettono in rilievo i nodi concettuali della Fisica sperimentale, focalizzandosi sull'analisi statistica delle misure e, più in generale, sui metodi di analisi dei dati raccolti. Vanno però anche oltre, perché si spingono a considerare il problema della costruzione dei modelli fisici per la descrizione dei fenomeni.

Le macro-aree disciplinari toccate da questi laboratori sono: meccanica, termologia, ottica, elettromagnetismo e fisica moderna.

Le attività sono così organizzate:

- incontro preliminare con i docenti delle scuole, in cui si discutono difficoltà e potenzialità didattiche degli esperimenti;
- individuazione di un percorso didattico basato su due o tre esperimenti;
- formazione e implementazione da parte degli studenti degli esperimenti scelti, inclusa l'analisi dati, presso le strutture del Dipartimento;
- relazione del lavoro sotto forma di presentazione orale.

Alcune delle attività di laboratorio che nel tempo sono state proposte dalle scuole sono:

- misura della costante elastica di una molla;
- misura dell'accelerazione di gravità con il pendolo semplice, mediante cronometro e smartphone;

- misura della prontezza del termometro;
- studio dell'andamento della temperatura in funzione del tempo del raffreddamento di massa ad acqua calda in un ambiente a temperatura costante;
- misurazione di una resistenza elettrica sconosciuta con il metodo voltamperometrico, del resistore variabile e con il metodo di confronto;
- diffrazione e misura dello spessore di un capello o del passo dei solchi di un cd;
- misura del rapporto tra carica e massa dell'elettrone.

Le prime cinque attività affrontano alcuni aspetti fondamentali della misura in fisica, quali: errori di misura, propagazione dell'errore, sensibilità degli strumenti, data fitting, etc... Le misure sulla diffrazione (Figura 1) e del rapporto tra carica e massa dell'elettrone (Figura 2) sono invece rivolte agli studenti delle classi quinte, che hanno così la possibilità di osservare alcuni fenomeni caratteristici della Fisica Moderna, concentrandosi su fenomeni ondulatori che coinvolgono la luce e le sue proprietà e corpuscolari, come nel caso degli elettroni.

I laboratori di avvicinamento alle discipline scientifiche

In questo ambito sono stati attivati i seguenti percorsi:

- Percorso sulle Stagioni e Clima, rivolto alle classi quarte/quinte, in cui si studiano i principali fattori alla base del clima di una data zona mediante lo studio dell'interazione termica radiazione-materia. Si affrontano nella discussione anche i cambiamenti climatici.
- Percorso di spettrometria, rivolto alle classi quarte/quinte, in cui si introducono i principi dell'analisi spettrale (analisi di Fourier) e le metodologie che sfruttano questa tecnica per ottenere informazioni su un sistema fisico.

Sono stati inoltre attivati nel tempo alcuni percorsi per le eccellenze:

- Percorso di Meccanica Quantistica. In questo percorso, rivolto alle classi quinte, si affrontano alcuni aspetti della meccanica quantistica: atomi ed elettroni, misura ed indeterminazione, stato, operatori e probabilità. L'approccio è basato su esperimenti, ad esempio con i LED per la misura di h .
- Percorso su evoluzione e struttura stellare. In questo percorso, rivolto alle classi quinte, si affrontano alcuni aspetti fondamentali di astrofisica stellare, focalizzandosi sulla formazione, evoluzione e struttura delle stelle e del Sole. Durante il percorso si presentano misure elementari di astronomia, misure su filmati del Sole, e misure di spettri di lampade a incandescenza, fluorescenza, vapori di gas (vedi Figura 3).

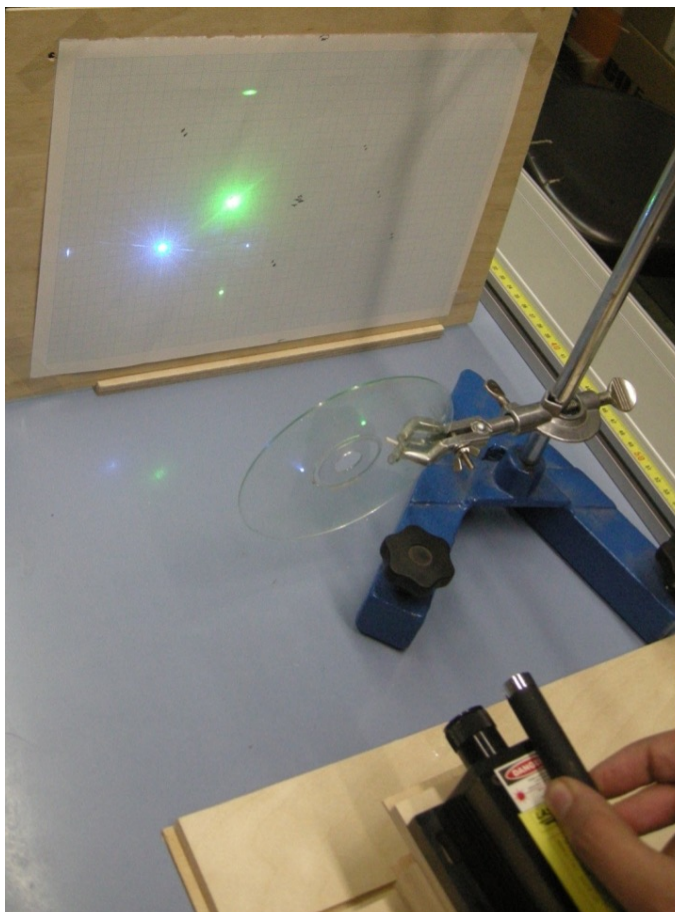


Figura 1: Esperimento per la misura del passo di un cd trasparente



Figura 2: Esperimento per la misura del rapporto tra carica e massa di un elettrone

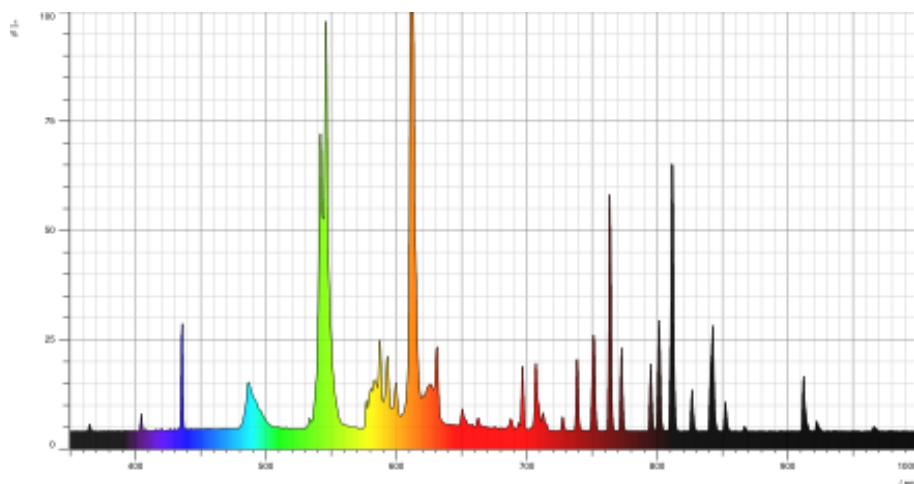


Figura 3: Esperimento per la misura degli spettri di una lampada a fluorescenza

I laboratori PLS di alfabetizzazione scientifica

Le attività di alfabetizzazione scientifica sono tipicamente rivolte a tutti gli studenti del terzo, quarto e quinto anno della scuola secondaria superiore. Sono stati nel tempo attivati i seguenti percorsi:

- **Fisica e Società.** Il percorso è finalizzato a migliorare la consapevolezza degli studenti del ruolo della comunicazione scientifica nella società moderna e far acquisire agli studenti competenze di argomentazione e di uso della conoscenza scientifica in situazioni controverse che coinvolgono tutti i cittadini, come, ad esempio, lo smaltimento dei rifiuti o la costruzione di nuove centrali nucleari. Gli studenti in piccolo gruppo discutono su una questione controversa e sono guidati, attraverso semplici esperimenti, a comprendere come utilizzare la conoscenza scientifica per risolvere le questioni proposte. Esempi di questioni proposte: riscaldamento globale, energia nucleare, smaltimento rifiuti, fonti rinnovabili.
- **Fisica e Tecnologia.** Questo percorso è finalizzato a migliorare la consapevolezza degli studenti del ruolo della Fisica nella progettazione tecnologica. In particolare, si adotta un approccio in cui l'indagine scientifica è integrata con la progettazione tecnologica.
- **Fisica in tempo reale.** In questo percorso gli studenti sono guidati, attraverso esperimenti con sensori connessi al computer, a realizzare semplici modelli usando funzioni matematiche elementari (vedi Figura 4).

I laboratori PLS di autovalutazione

Nei laboratori di autovalutazione si guidano gli studenti alla risoluzione di vari problemi di Fisica, con particolare attenzione alle capacità di argomentazione e risoluzione

in situazioni complesse. Gli strumenti che si utilizzano sono soprattutto i Concept inventories, validati dalla ricerca in didattica della Fisica. In questo contesto, sono stati assegnati agli studenti anche problemi analoghi a quelli dei test d'ammissione ai corsi di studio di Scienze e Ingegneria, i cui risultati sono descritti altrove [7].

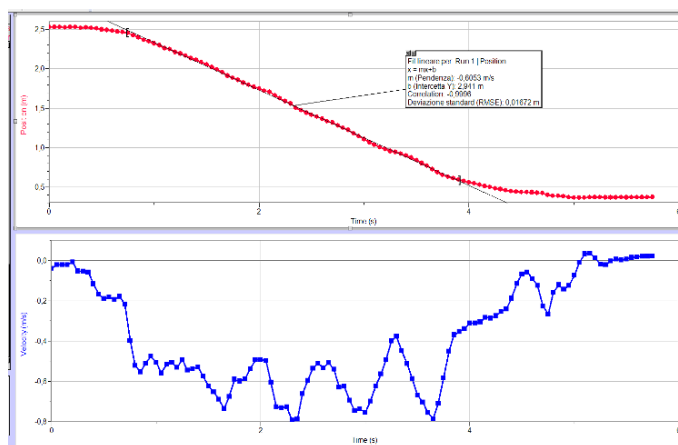


Figura 4: Esperimento per le misure in tempo reale di una camminata di uno studente

Esempi di percorsi didattici realizzati nell'ambito del PLS Fisica

Queste attività presentano un percorso didattico coerente su un tema/contesto specifico per i contenuti di fisica affrontati. Metodologicamente la sequenza si ispira ad un approccio integrato di Inquiry-Based Learning e Design-Based Learning [8-10]. Presentiamo qui in dettaglio tre percorsi, uno sulle fibre ottiche che affronta contenuti quali la legge di rifrazione/riflessione e l'indice di rifrazione, uno sull'isolamento termico che affronta la legge di Newton per il raffreddamento/riscaldamento dei fluidi, ed uno sul caos, che affronta la fisica dei corpi rigidi.

Percorso sulle fibre ottiche

Questo percorso di circa 9 ore, rivolto a studenti del Liceo Scientifico integra attività di laboratorio hands-on con attività di modellizzazione al tempo realizzate con Cabri Géomètre (ora si potrebbero utilizzare software quali GeoGebra o Tracker). Il percorso è descritto in maggiore dettaglio altrove [11-12].

Nel primo incontro, si discutono alcune situazioni relative all'utilizzo delle fibre ottiche nelle telecomunicazioni. Quindi, si studia il comportamento delle lampade in fibra di vetro, delle barre trasparenti di plastica, di barre di vetro che interagiscono con la luce al fine di scoprire somiglianze e differenze tra le fibre ottiche e altri oggetti trasparenti che possono guidare la luce. Quindi, viene eseguito dagli studenti in piccoli gruppi un esperimento con un getto d'acqua illuminato per discutere su come costruire

una guida luminosa e su come descrivere il comportamento della luce quando viaggia in materiali omogenei e incontra interfacce tra di loro. (Figura 5).

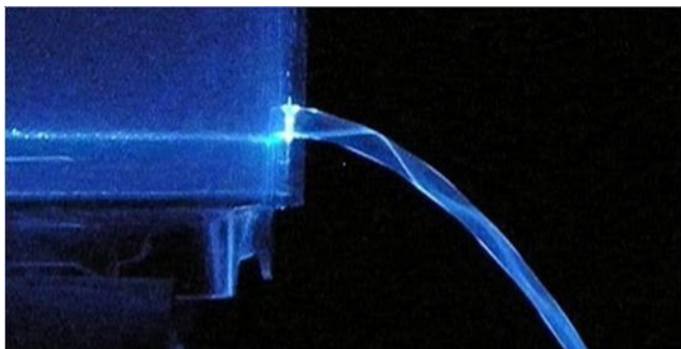


Figura 5: Esperimento della propagazione della luce in un getto d'acqua

Successivamente, gli studenti osservano il percorso di un raggio laser in una vasca riempita a metà d'acqua per mezzo di particelle diffuse. L'attenzione degli studenti viene richiamata sia sui fenomeni di riflessione che di rifrazione, come modi per deviare la luce da un percorso rettilineo (Figura 6).



Figura 6: Propagazione della luce in un vasca parzialmente riempita d'acqua

Nel secondo incontro si formalizzano le leggi della rifrazione e della riflessione mediante misure sulle immagini stesse (Figure 7 e 8) utilizzando Cabri Géomètre. L'indice di rifrazione di un mezzo omogeneo rispetto ad un altro viene quindi introdotto come proprietà ottica che permette di prevedere la deviazione del percorso della luce quando la luce colpisce l'interfaccia tra i due mezzi. Le leggi dell'ottica geometrica vengono quindi utilizzate per descrivere quantitativamente ciò che accade in una fibra ottica, con particolare attenzione alle condizioni per cui avviene la riflessione interna totale.



Figura 7: Misura degli angoli di incidenza e di rifrazione mediante il software Cabri

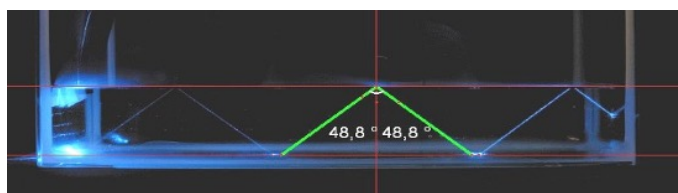


Figura 8: Misura degli angoli di incidenza e di riflessione in caso di riflessione totale

Nel terzo e ultimo incontro (3 ore) si propone un esperimento qualitativo sulla propagazione di un raggio laser in un tubo di vetro immerso in aria e in acqua per osservare come è fatta una fibra ottica; in particolare, per chiarire la necessità di un rivestimento per "proteggere" l'anima della fibra ed il suo ruolo sulla propagazione della luce nella fibra e sull'angolo di accettazione. Le regolarità osservate sono poi formalizzate mediante una simulazione (Figura 9).

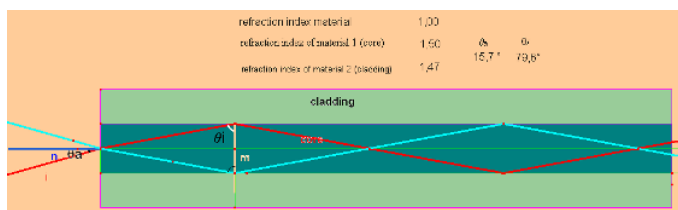


Figura 9: Simulazione di una fibra ottica con Cabri

La simulazione in particolare permette di: - introdurre l'angolo di accettazione, l'apertura numerica e l'angolo critico al quale avviene la riflessione interna totale all'interno del nucleo di una fibra ottica; - mettere in relazione l'apertura numerica

con gli indici di rifrazione del nucleo e del rivestimento in una fibra ottica con indice variabile.

Percorso sull'isolamento termico

Questo percorso è rivolto a studenti di un Istituto Tecnico o Professionale e si basa su misure in tempo reale di temperatura, mediante sensori costruiti con Arduino oppure utilizzando il componente integrato LM35C. Maggiori dettagli sono riportati in [13]. Nel primo incontro (4 ore), gli studenti in piccoli gruppi (3-4), misurano per circa 20 minuti, prima con un termometro analogico e poi con una sonda di temperatura, la variazione di temperatura di masse d'acqua in un bicchiere di plastica (circa 200g) a temperatura iniziale pari a circa 60° C, lasciato raffreddare a temperatura ambiente (circa 23°C). Il fenomeno può essere modellizzato con una funzione esponenziale del tipo , in cui la costante di tempo C dipende dalla massa dell'acqua, dal calore specifico dell'acqua, dal materiale di cui è fatto il bicchiere, e dalla superficie di scambio termico (Figure 10 e 11).

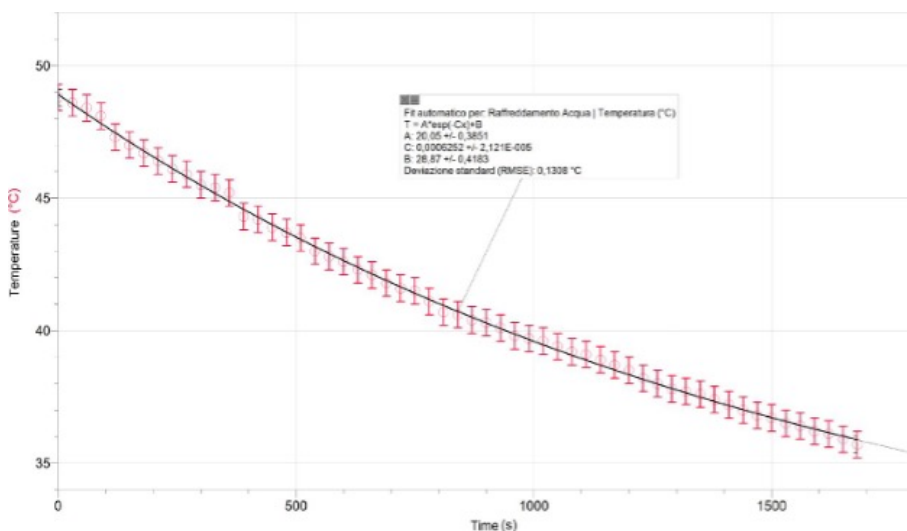


Figura 10: Analisi dei dati dell'esperimento di raffreddamento di una massa d'acqua con un termometro analogico

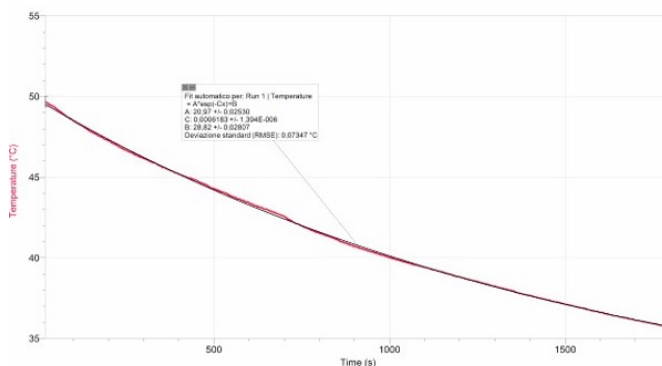


Figura 11: Analisi dei dati dell'esperimento di raffreddamento di una massa d'acqua con sonda di temperatura.

Nel secondo incontro (2 ore), gli studenti in piccolo gruppo affrontano il problema della scelta dei materiali più adatti per le pareti di una casa in modo che ogni stanza possa rimanere ad una temperatura costante di circa 22°C quando illuminata dal Sole. Quando le condizioni lo permettono, è possibile costruire un modello di casa di cartone con due o tre locali, ciascuna dotata di un sensore di temperatura per monitorarne la temperatura, illuminata da un Sole artificiale, ad esempio una lampada da 150 W (Figura 12).



Figura 12: Modello di casa per studiare l'isolamento termico. La ventola raffredda una delle "stanze"

Per costruire il modello di casa, gli studenti dovrebbero tenere conto dei precedenti esperimenti sul raffreddamento dell'acqua, ad esempio del ruolo del materiale della tazza sull'andamento della temperatura dell'acqua. Nell'esempio in Figura 13 vi è un "soffitto" in polistirene in un locale (stanza 1), mentre gli altri due locali sono senza soffitto. Inoltre, uno dei locali (stanza 2) è più lontano dalla lampada, mentre due stanze (stanza 1 e 3) sono illuminate come la stanza 1 (Figure 13). Esempi di misure sono riportate in Figura 14.



Figura 13: Esempio di setting sperimentale per studiare l'isolamento termico di un modello di casa. Una stanza è coperta da un "soffitto" in polistirolo mentre le altre sono scoperte. La casa è illuminata da una lampada da 150 W che rappresenta il Sole.

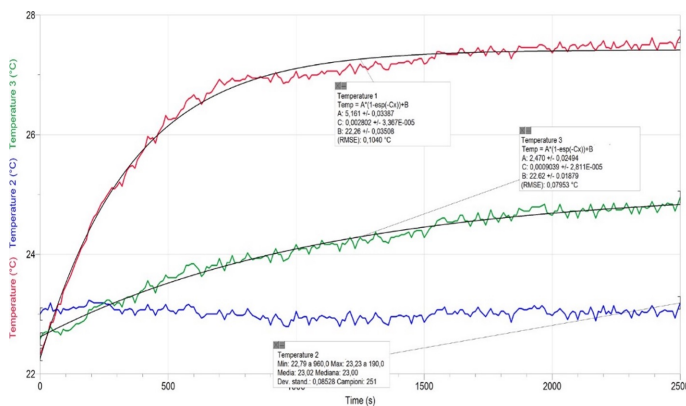


Figura 14: Misura della temperatura nelle tre stanze del modello di casa illuminata da una lampada da 150 Watt (vedi Figura 13).

L'analisi dei dati mostra che nella stanza più lontana, stanza 2, separata dalla sorgente di calore dalle altre stanze, la temperatura (dati in blu) era quasi costante, pari a circa 23°C. Nelle altre due stanze, più vicine alla sorgente di calore, la temperatura aumenta esponenzialmente ma con costanti di tempo diverso. In particolare, si osserva che nella stanza 1, isolata con il soffitto in polistirolo dall'ambiente la temperatura aumenta fino a 27°C, mentre nella stanza 3 che scambia calore con l'esterno, la temperatura aumenta solo fino a 25°C.

Percorso sul caos

Il percorso didattico, di 6 ore, è rivolto a studenti del liceo scientifico ed integra attività di laboratorio hands-on con attività di modellizzazione con il software Tracker, prevedendo anche l'uso di simulazioni reperibili in rete. Maggiori dettagli sono riportati in [14]. Nella prima fase (2 ore), gli studenti riflettono sul concetto di prevedibilità di un fenomeno, in particolare sulla dipendenza dell'evoluzione temporale delle variabili che descrivono il fenomeno a partire da determinate condizioni iniziali. Per raggiungere questo obiettivo, gli studenti sono guidati a confrontare l'evoluzione temporale della posizione, della velocità e dell'accelerazione di una massa attacca-

-ta all'estremità libera di una molla quando le condizioni iniziali del moto vengono leggermente modificate utilizzando una simulazione on-line (<https://www.myphysicslab.com/springs/single-spring-en.html>). La stessa analisi viene effettuata per un semplice pendolo (<https://www.myphysicslab.com/pendulum/pendulum-en.html>). L'insegnante guida quindi gli studenti a capire che, in un fenomeno classico non caotico, una piccola variazione delle condizioni iniziali non cambia il modo in cui le variabili che descrivono il fenomeno dipendono dal tempo. Agli studenti viene quindi chiesto di ipotizzare il comportamento di un pendolo doppio (Figura 15), tenendo conto delle forze che agiscono sul sistema. Si chiede anche di tracciare il diagramma del corpo libero e di prevedere qualitativamente il moto del sistema in due casi limite: $m_2 \ll m_1$ e $L_2 \ll L_1$.

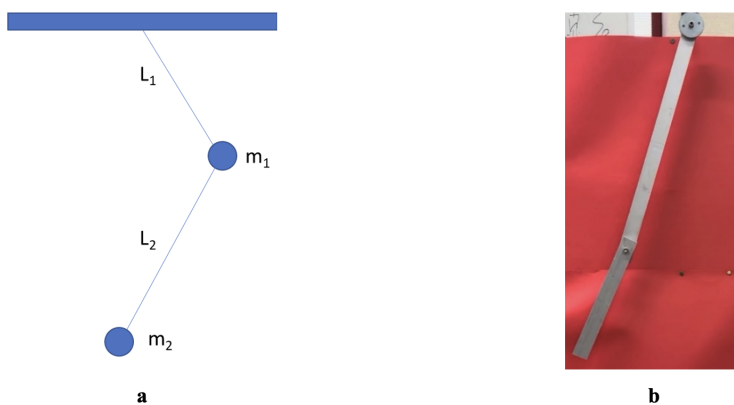


Figura 15: Rappresentazione schematica (a) e fotografia (b) di un pendolo doppio. La lunghezza della barra più lunga è $L_1 = 0.66$ m, la lunghezza della barra più corta è $L_2 = 0.33$ m, la massa totale è $M = 3$ kg.

Nella seconda fase (2 ore), si sviluppa una descrizione qualitativa del moto del sistema a doppio pendolo nello spazio momento-posizione utilizzando il software Tracker per studiare le condizioni in cui il doppio pendolo si comporta come un pendolo fisico con un momento d'inerzia appropriato. All'inizio dell'attività, gli studenti guardano un breve filmato delle oscillazioni del doppio pendolo e sono quindi invitati a confrontare le loro previsioni con il moto reale del sistema e a scriverne le somiglianze e le differenze. Quindi, utilizzano il software Tracker per ricostruire autonomamente la traiettoria dell'estremità libera del doppio pendolo nel piano verticale in due casi in cui si modificano solo leggermente le condizioni iniziali. Esempi di misure effettuate con la funzione "tracking" del Tracker sono riportati nelle Figure 16a e 16b.

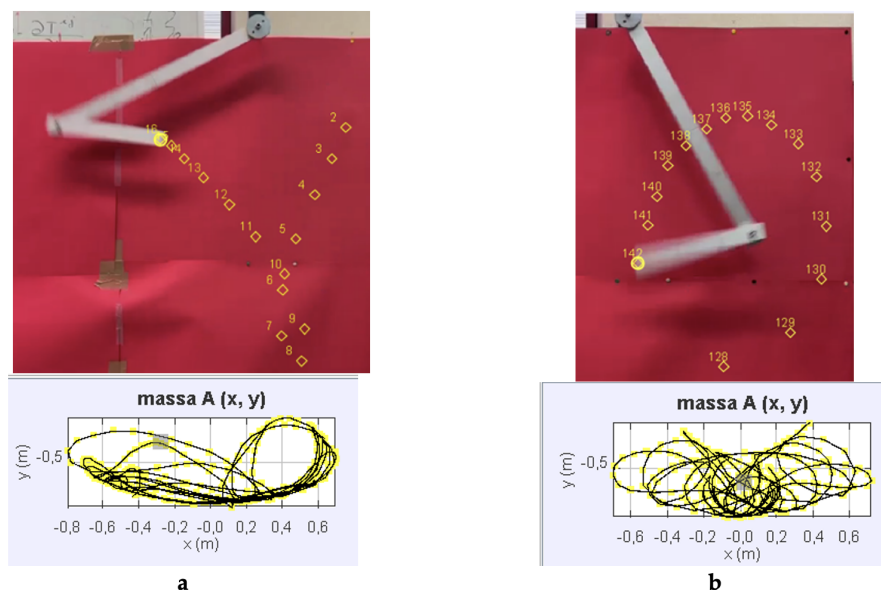


Figura 16: Esempi di misurazioni della traiettoria del pendolo doppio di Figura 15b con Tracker. I due moti corrispondono a condizioni iniziali leggermente diverse.

Infine, nella terza fase (2 ore) si chiede agli studenti di verificare con Tracker che, per oscillazioni molto piccole, il doppio pendolo si comporta come un pendolo fisico, con un opportuno momento d'inerzia e lunghezza equivalente (si veda Figura 17). Per esplorare ulteriormente il ruolo delle condizioni iniziali, agli studenti viene chiesto di confrontare le traiettorie nello spazio momento-posizione del doppio pendolo per oscillazioni piccole e ampie, visualizzandole con Tracker e una simulazione online (<https://www.mypysicslab.com/pendulum/double-pendulum-en.html>).

Conclusioni

Il PLS nei suoi 20 anni di attività si è dimostrato un punto di riferimento efficace per colmare il divario tra scuole secondarie e università nell'alfabetizzazione scientifica. Il numero delle scuole, degli insegnanti e degli studenti coinvolti è aumentato costantemente nel corso degli anni. Ad esempio, nel 2015 erano circa 800 studenti partecipanti ai PLS di Chimica, Fisica e Matematica, diventati circa 2500 nel 2019, con una media di 300 studenti per ogni PLS. Similmente, il numero di istituti scolastici partecipanti è cresciuto dai complessivi 40 del 2015 ai 150 del 2019, così come il numero di docenti di scuola secondaria coinvolti, che è cresciuto dai 70 del 2015 ai 250 del 2019. Dopo una flessione naturale dovuta al COVID, il numero di studenti e istituti è ritornato nel 2025 ai livelli del 2019. La ragione principale di questo successo è che gli obiettivi strategici perseguiti dal PLS hanno permesso la costruzione sul

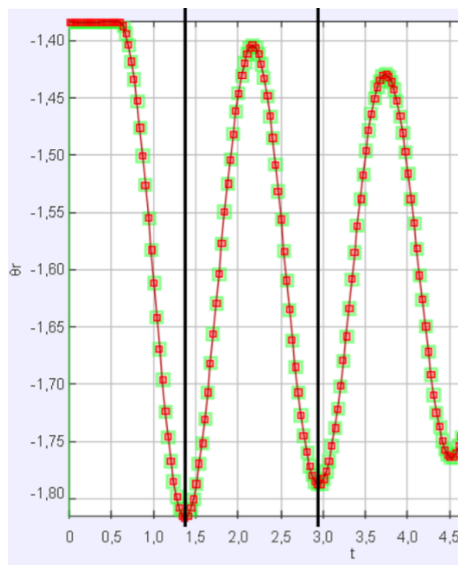


Figura 17: Misure di pseudo-periodo delle piccole oscillazioni del doppio pendolo di Figura 15b mediante il software Tracker.

territorio di forti legami, in primo luogo con le istituzioni scolastiche partecipanti. Tra queste, numerose hanno individuato il PLS come interlocutore privilegiato per l'alfabetizzazione scientifica degli studenti del proprio bacino di utenza e per la formazione insegnanti. Dati raccolti mediante interviste informali condotte con i referenti scolastici PLS hanno mostrato che i laboratori PLS sono percepiti dagli insegnanti anche come un modo per approfondire la preparazione degli studenti su temi di base sui quali erano state evidenziate carenze a livello curricolare. A tale proposito particolarmente apprezzati sono stati gli interventi realizzati per venire incontro alla riforma dei curricula del quinto anno dei licei scientifici, in quanto gli studenti delle classi quinte hanno partecipato a laboratori sui fenomeni caratteristici della Fisica Moderna (dualità onda-particella, effetto fotoelettrico, indeterminazione etc.). Alcune scuole hanno poi organizzato presentazioni delle attività svolte a visitatori esterni in occasione di scambi culturali o in giornate dedicate all'orientamento. L'aspetto particolarmente apprezzato dagli studenti e dai docenti che hanno partecipato ai PLS è stata la possibilità di verificare sperimentalmente, attraverso le attività proposte, ciò che a scuola si studia solo dal punto di vista teorico e di realizzare esperienze pratiche nei laboratori universitari. In tal modo è stato possibile il consolidamento delle conoscenze su alcune tematiche di base comprese nei programmi ministeriali e lo sviluppo di competenze laboratoriali e di problem solving. Ulteriore aspetto positivo sottolineato dagli insegnanti nelle interviste è relativo al fatto che i laboratori PLS consentono agli studenti di affrontare problematiche tipiche dei corsi universitari, confrontandosi con nuove metodologie di studio e con la richiesta di una conoscenza critica dei temi, al fine di individuare interessi e predisposizioni specifiche, nonché di valutare la propria

preparazione di base nei campi più disparati delle discipline STEM, attraverso attività e momenti di riflessione sulle proprie conoscenze, fornendo incentivi a integrarle se necessario. Molto apprezzata è anche la possibilità di affrontare, mediante i laboratori PLS di approfondimento, argomenti di ricerca avanzati evidenziando il ruolo delle diverse discipline nella società e quindi le prospettive occupazionali offerte dai corsi scientifici coinvolti. Laddove è stato richiesto, i docenti referenti PLS hanno presentato nelle scuole interessate, e quindi ad una popolazione studentesca ampia, i corsi di studio di riferimento. Infine, è emerso che una delle peculiarità più apprezzate dei laboratori PLS è stata quella di incentrare le attività su progetti multidisciplinari articolati in percorsi tematici modulati secondo le esigenze didattiche di ciascuna scuola (intersezione con il macro- e micro-curriculum, orari scolastici, flessibilità).

Bibliografia

- [1] Bybee, R.W. (2006) Indagine scientifica e insegnamento delle scienze. In L.B. Flick & N.G. Lederman (a cura di), *Scientific Inquiry e natura della scienza* (pp. 1-14). Springer: Dordrecht, Paesi Bassi.
- [2] Krajcik, J., Blumenfeld, P., Marx, R., & Soloway, E. (2000). Supporti didattici, curriculari e tecnologici per l'indagine nelle aule di scienze. In J. Minstrell & E. V. Zee (a cura di), *Inquiry into Inquiry: Science Learning and Teaching* (pp. 283-315). Washington, DC: Associazione americana per l'avanzamento della stampa scientifica.
- [3] Schwartz, R.S. & Crawford, B.A. (2006) Authentic Scientific Inquiry as context for teaching nature of science: identifying ingredients ingredients for successful. In L.B. Flick & N.G. Lederman (a cura di), *Indagine scientifica e natura della scienza* (pp. 331-356). Springer: Dordrecht, Paesi Bassi.
- [4] Lijnse, P. L. (2008) Modelli di / per l'insegnamento della modellazione. In E. van den Berg, T. Ellermeijer, O. Slooten (a cura di), *Modellazione in fisica e didattica della fisica* (pp. 20-33). Amsterdam, Università di Amsterdam
- [5] Casaglia, A., De Luca S., & Sarti S. (2010) Il Progetto Lauree Scientifiche nel vissuto dei docenti. Studio Prospettico Dei Laboratori Di Orientamento E Formazione Degli Insegnanti.
- [6] Dipace A. & Frontini M. (2010) Progetto Lauree Scientifiche. Monitoraggio e valutazione dei laboratori dei progetti di Orientamento e Formazione degli Insegnanti.
- [7] Capasso, G., Colantonio, A., Coppeta J., Galano S., Scotti di Uccio, U., Serroni, G., Testa I. (2018) Conoscenze di fisica di base degli studenti al termine della scuola secondaria. *Giornale di Fisica*, 59, 4, 331-363
- [8] Fortus, D., Dershimer C., Krajcik, J., Marx, R. W., Mamlok-Naaman, R. (2004) Scienza basata sul design e apprendimento degli studenti. *Giornale di ricerca nell'insegnamento delle scienze*, 41(10), 1081-1110

- [9] Puntambekar, S., & Kolodner, J. L. (2005). Verso l'implementazione di apprendimento strutturato: aiutare gli studenti a imparare la scienza a partire dalla progettazione. *Giornale di ricerca nell'insegnamento delle scienze*, 42(2), 185-217.
- [10] Schnittka, C. G., & Bell, R. L. (2010). Progettazione ingegneristica e cambiamento concettuale nella scienza: affrontare l'energia termica e il trasferimento di calore in terza media. Documento presentato alla Conferenza Annuale della Associazione Nazionale per l'insegnamento della Scienze, Philadelphia, PA
- [11] Monroy, G., Testa, I., & Lombardi, S. (2008): Insegnare la fisica delle onde attraverso la modellazione di immagini. Utilizzo di Cabri® per affrontare le onde dell'acqua: modelli geometrici e leggi di base. In E. van den Berg, T. Ellermeijer, O. Slooten (a cura di), *Modellazione in fisica e didattica della fisica*, (pp. 299-307). ISBN: 978-90-5776-177-5. Amsterdam, Università di Amsterdam
- [12] Testa, I., & Lombardi, S. (2007) Esperimenti didattici e immagini: misure quantitative con Cabri Géomètre. *Giornale di Fisica*, 48(3), 151-169
- [13] Chiefari, G., Sassi E., & Testa I. (2014) Migliorare l'alfabetizzazione scientifica e le competenze di laboratorio degli studenti secondari: il progetto italiano "Lauree scientifiche". In Tasar M. F. (ed), *Atti della Conferenza Mondiale sulla Didattica della Fisica 2012* (53-63). ISBN 978-605-364-658-7. Ankara, Turkey: Pegem Akademi
- [14] Parlati, A., Giuliana G., & Testa I. (2024) Progettazione e sviluppo di una sequenza di insegnamento-apprendimento sul caos deterministico utilizzando il software Tracker. *Scienze dell'educazione*, 14, 8, 842.

Le curve e lo spazio

An introduction to matching theory

Claudia Meo ¹

Abstract

Qual è il modo migliore di abbinare future matricole e corsi di laurea ad accesso programmato, rifugiati politici e Paesi pronti a fornire loro asilo, pazienti in attesa di trapianto ed organi disponibili? Cosa deve intendersi per “abbinamento migliore”? A prescindere da quanto disparati siano gli ambiti in cui queste domande ci proiettano, l'elemento che li accomuna è la presenza di due insiemi distinti (studenti e corsi di laurea, rifugiati politici e Paesi disponibili a dar loro asilo, pazienti ed organi) e di preferenze che gli elementi di uno soltanto o entrambi gli insiemi manifestano, più o meno palesemente, sugli elementi dell'altro insieme: uno studente può preferire Lettere a Ingegneria e, d'altra parte, un corso di laurea in Ingegneria può dare priorità di immatricolazione ad uno studente che si distingue in matematica piuttosto che in storia; un rifugiato politico afgano può prediligere la Germania all'Italia perché parte del suo nucleo familiare si trova già in quel Paese; un paziente in attesa di un trapianto di rene preferisce un organo prelevato da un donatore vivente piuttosto che uno proveniente da un donatore deceduto e, tra quelli provenienti da donatori viventi, preferisce quello con compatibilità genetica maggiore. Delineato questo modello semplificato, costituito da due insiemi disgiunti e da ordinamenti di preferenze, quali sono gli abbinamenti che dovremmo aspettarci? Ciò costituisce l'oggetto di ricerca della cosiddetta *teoria dei matching* (matching theory), un filone di ricerca relativamente recente, oggi ampiamente sviluppato e variegato, a cavallo tra economia, matematica e computer science. Come suggerito dal nome stesso della teoria, in essa si analizzano, attraverso una modellizzazione matematica, quali possano essere gli abbinamenti (matching) ottimali tra elementi appartenenti, solitamente, a due insiemi disgiunti che, come dimostrato dalle domande iniziali, possono essere di varia natura. Tali abbinamenti vengono fatti tenendo conto delle preferenze che ciascun elemento di uno dei due insiemi manifesta sugli oggetti dell'insieme contrapposto. La teoria trae origine da un lavoro

¹claudia.meo@unina.it - Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche, Università degli Studi di Napoli Federico II

pubblicato nel 1962 da due economisti statunitensi, David Gale e Lloyd S. Shapley², dal titolo eloquente “*College Admissions and the Stability of Marriage*”. Nel loro articolo, di sole sette pagine, viene affrontato un tema di grande rilievo negli Stati Uniti: le ammissioni all’università. Il lavoro, a sua volta, prende spunto da un articolo apparso sul New Yorker il 10 settembre 1960, in cui venivano descritte le difficoltà degli studenti ad essere ammessi all’Università di Yale. In questa breve presentazione, analizzeremo un modello base della teoria dei matching, i cosiddetti matching bilaterali (two-sided matchings), in cui gli abbinamenti avvengono tra elementi (oggetti e/o individui) appartenenti a due insiemi disgiunti e ciascun elemento di un insieme ha preferenze sugli elementi dell’altro insieme. Ci limiteremo inoltre ad un modello one-to-one, in cui ogni elemento di uno dei due insiemi viene abbinato ad un unico elemento dell’altro insieme. Osserviamo che due delle nostre domande iniziali si riferiscono a modelli bilaterali di matching, ma di tipo one-to-many: ogni studente può iscriversi ad un solo corso di laurea ma un corso di laurea accoglie più matricole; un rifugiato viene accolto da un solo paese che può però dare asilo a più rifugiati politici. Nell’ambito di un modello di matching bilaterale one-to-one, analizzeremo le questioni seguenti: da quali elementi è costituito un modello di matching? Come si definisce formalmente un matching? Quale proprietà rende un matching preferibile ad un altro? È sempre garantita l’esistenza di matching con tale proprietà?

Un modello elementare di matching bilaterale

Per semplicità di esposizione ed esulando da qualsiasi considerazione legata al gender, ci riferiremo al classico *marriage model* introdotto da Gale e Shapley nel loro lavoro; lo tradurremo in italiano con la dicitura *gioco delle coppie*.

Nel gioco delle coppie si considerano due insiemi disgiunti W e M formati, rispettivamente, da m donne e da n uomini.

Ogni donna ha delle preferenze sugli uomini e, viceversa, ogni uomo ha delle preferenze sulle donne. Per non complicare la trattazione, supponiamo che non si possa essere indifferenti tra due opzioni. Le preferenze di ciascuna donna sono quindi rappresentate da un elenco ordinato degli uomini che partecipano al gioco; analogamente, le preferenze di ciascun uomo sono rappresentate da un elenco ordinato delle donne presenti. Nel modello contempleremo la possibilità che un individuo possa restare single; per questo, agli elenchi ordinati di preferenza di ciascun individuo aggiungeremo l’individuo stesso.

In termini più formali, le preferenze di ciascuna donna $w \in W$ sono degli ordinamenti lineari sull’insieme $M \cup \{w\}$, ovvero delle relazioni complete, transitive e antisimmetriche; analogamente, le preferenze di ciascun uomo $m \in M$ sono degli ordinamenti lineari sull’insieme $W \cup \{m\}$.

²Lloyd Shapley è stato insignito del Premio Nobel per l’Economia nel 2012, insieme ad Alvin Roth, uno degli economisti che ha dato maggior impulso alla teoria dei matching negli ultimi quarant’anni. Il premio è stato assegnato proprio per la teoria degli insiemi stabili e la pratica del market design (for the theory of stable allocations and the practice of market design).

Facciamo un esempio.

Supponiamo che al nostro gioco delle coppie prendano parte quattro donne e cinque uomini. Bruna, Carla, Diana e Flavia sono gli elementi dell'insieme W ; Antonio, Ettore, Ivan, Ottavio e Ugo sono gli elementi dell'insieme M . Nelle due tabelle seguenti riportiamo le preferenze di ciascun uomo (fig. 1 - tabella di sinistra) e di ciascuna donna (Fig. 1 - tabella di destra):

Antonio	B	C	D	F
Ettore	F	C	D	B
Ivan	F	D	B	C
Ottavio	B	F	D	C
Ugo	B	C	F	U

Bruna	E	I	A	O	U
Carla	I	A	E	O	U
Diana	U	O	A	E	I
Flavia	A	O	U	E	I

Figura 1:

Dalla prima riga della tabella a sinistra risulta che Antonio preferisce Bruna a Carla, che a sua volta è preferita a Diana; Flavia risulta invece ultima nella personale graduatoria di Antonio. Questo ordinamento di preferenza di Antonio lo indicheremo anche con la notazione seguente:

$$B >_A C >_A D >_A F$$

La notazione $B >_A C$ si legge “Antonio preferisce Bruna a Carla”.

Osserviamo ora l'ultima riga della medesima tabella, in cui è riportato l'ordinamento di preferenza di Ugo. In tale ordinamento non compare Diana; Ugo preferisce, cioè, restare single piuttosto che sposare Diana. Diremo che Diana non è accettabile per Ugo; al contrario, Bruna, Carla e Flavia sono accettabili per Ugo.

L'obiettivo della teoria dei matching è quello di fare una previsione degli abbinamenti (matching) che si formeranno sulla base delle preferenze manifestate dai soggetti coinvolti nel problema.

Intanto, un matching è una funzione biunivoca $\mu : W \cup M \rightarrow W \cup M^3$ tale che:

- Ogni uomo viene abbinato a una donna oppure a sé stesso:

$$\mu(m) \in W \cup \{m\}, \text{ per ogni } m \in M.$$

- Ogni donna viene abbinata a un uomo oppure a sé stessa:

$$\mu(w) \in M \cup \{w\}, \text{ per ogni } w \in W.$$

³Un algebrista parlerebbe di permutazione sull'insieme $W \cup M$

- Se l'uomo m è abbinato alla donna w , allora la donna w deve essere abbinata all'uomo m , e viceversa:

$$\mu(m) = w \iff \mu(w) = m, \text{ per ogni } m \in M, \text{ per ogni } w \in W.$$

Torniamo al nostro gioco delle coppie e prendiamo in considerazione i tre matching seguenti che ci introdurranno alla definizione di stabilità:

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} A & E & I & O & U \\ B & C & I & F & D \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} A & E & I & O & U \\ C & B & F & D & U \end{pmatrix} \quad \mu_3 = \begin{pmatrix} A & E & I & O & U \\ F & B & C & D & U \end{pmatrix}$$

Nel primo matching, ad esempio, Antonio è abbinato a Bruna, Ettore a Carla, Ivan rimane single, Ottavio è abbinato a Flavia e Ugo a Diana.

Ricordando che la bontà di un matching non può prescindere dalle preferenze manifestate da tutti i soggetti coinvolti, emergono queste considerazioni.

- Nel primo matching, Ugo è abbinato all'unica donna per lui non accettabile, Diana. Ugo ha un forte incentivo a divorziare da Diana; divorziando, migliora infatti la sua situazione:

$$U >_U \mu_1(U) = D$$

μ_1 non può quindi essere considerato un “buon” matching; la stabilità degli abbinamenti previsti dal matching μ_1 è minata da Ugo.

- Nel secondo matching, la coppia (Ottavio, Flavia) ha incentivo a divorziare perché sia Ottavio che Flavia preferiscono l'altro elemento della coppia al partner che viene loro assegnato da μ_2 :

$$F >_O \mu_2(O) = D \text{ e } O >_F \mu_2(F) = I$$

Pertanto, neppure μ_2 può essere considerato un “buon” matching; la sua stabilità è minata stavolta da Ottavio e Flavia che hanno un forte incentivo a deviare dall'abbinamento proposto. Per comprendere meglio lo spirito che guida la teoria dei matching, osserviamo che anche Antonio vorrebbe divorziare da Carla ed essere abbinato a Bruna, che precede Carla nel suo ordinamento di preferenze; ma il suo desiderio non è realizzabile poiché Bruna non ha alcuna intenzione di separarsi da Ettore, sua prima scelta, per essere associata ad Antonio.

- Nel terzo matching, non ci sono coppie che abbiano incentivo al divorzio. Osserviamo che Antonio, sebbene sia abbinato alla sua scelta peggiore (Flavia), non trova alcuna donna disponibile ad abbandonare il proprio partner; infatti, Bruna è abbinata alla sua prima scelta così come Carla; Diana è abbinata a Ottavio che rappresenta la sua seconda scelta; cambiando partner e passando con Antonio, peggiorerebbe il suo status. Analogo ragionamento può essere ripetuto per gli altri uomini: la loro eventuale predisposizione ad un divorzio non è assecondata dalle partner con le quali desidererebbero essere associati.

Formalizziamo la nozione di matching stabile.

Un matching μ è stabile se soddisfa le due proprietà seguenti:

- $\mu(i) \geq_i i$, per ogni $i \in W \cup M$;
- non esiste una coppia $(w, m) \in W \times M$ tale che:

$$\begin{cases} w >_m \mu(m), \\ m >_w \mu(w). \end{cases}$$

La prima condizione ci dice che, affinché il matching sia stabile, ciascun individuo deve essere abbinato ad un partner per lui accettabile (in caso contrario, l'individuo opterebbe per il divorzio, minando la stabilità del matching).

La seconda condizione ci dice che non deve esserci alcuna coppia di individui, formata da un uomo e da una donna, incline al divorzio; tale, cioè, che entrambi gli individui nella coppia preferiscano il legame tra loro a quello proposto dal matching in esame.

Nell'esempio fatto in precedenza, né μ_1 né μ_2 sono stabili per motivi diversi. μ_1 non è stabile perché la prima condizione non è soddisfatta per Ugo. μ_2 non è stabile perché la seconda condizione non è soddisfatta per la coppia $(F, O) \in W \times M$ formata da Flavia e da Ottavio.

Le domande che ora ci poniamo sono le seguenti: un gioco delle coppie ammette sempre un matching stabile? Tale matching è unico? Come è possibile individuarlo? La prima domanda ha una risposta affermativa. Il teorema di esistenza di un matching stabile in ogni gioco delle coppie si deve a Gale e Shapley ed è contenuto nel lavoro che abbiamo precedentemente menzionato [4].

Teorema 1. (Gale e Shapley, 1962)

Ogni gioco delle coppie ammette almeno un matching stabile, indipendentemente dal numero di individui coinvolti e da quali siano i loro ordinamenti di preferenza.

Dimostrazione. L'esistenza di un matching stabile viene ottenuta attraverso l'utilizzo di un semplice algoritmo il cui funzionamento è illustrato di seguito. L'algoritmo procede per passi ed assegna un ruolo preciso ad ognuno dei due insiemi di individui che prendono parte al gioco delle coppie: una delle due parti ha il compito di proporre matrimoni; la controparte ha invece il compito di accettare o rifiutare tali proposte.

Supponiamo, come nel lavoro originale di Gale e Shapley, che siano gli uomini a proporre matrimoni e le donne abbiano invece la facoltà di accettarli o rifiutarli.

Nel primo passo, ciascun uomo $m \in M$ fa una proposta alla donna che figura per prima nella sua lista di preferenze. Ogni donna $w \in W$ rifiuta le eventuali proposte provenienti da uomini per lei non accettabili; inoltre, accetta, in via non definitiva, la proposta proveniente dall'uomo a lei preferito e rifiuta tutte le altre proposte. L'uomo accettato dalla donna w in questo primo passo viene inserito in una sorta di "lista d'attesa" che la donna w potrà modificare nei passi successivi.

Al secondo passo, ciascun uomo rifiutato nel passo precedente fa una proposta di matrimonio alla donna che risulta seconda nella sua lista di preferenze; ogni donna si comporta come nel primo passo, accettando esclusivamente la proposta proveniente

dall'uomo a lei preferito e rifiutando tutte le altre proposte. Osserviamo che, in questo secondo passo, possono essere eliminate dalla lista d'attesa proposte ricevute nel passo precedente.

L'algoritmo termina quando ciascun uomo risulta abbinato ad una donna. Può però accadere che vi siano uomini rifiutati da tutte le donne per loro accettabili e donne che non ricevono alcuna proposta di matrimonio; tali individui rimangono single.

Osserviamo che l'algoritmo termina sempre in un numero finito di passi poiché il numero di uomini e donne è finito e non può accadere che un uomo faccia una proposta di matrimonio ad una stessa donna per più di una volta. Inoltre, il risultato dell'algoritmo è un matching poiché in ciascuna fase ogni uomo è abbinato al più con una donna e viceversa.

Proviamo ora che il matching μ prodotto dall'algoritmo è stabile. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che esista una coppia $(m, w) \in M \times W$ tale che l'uomo m preferisca w a $\mu(m)$ e, simmetricamente, la donna w preferisca l'uomo m al proprio partner (w). La donna w è quindi accettabile per m ; questo implica che m deve aver proposto un matrimonio a w prima che alla sua attuale partner $\mu(m)$ (o prima di essere rifiutato da tutte le donne per lui accettabili). Poiché m non risulta abbinato a w nel matching μ , w deve aver rifiutato la proposta di m a favore di un uomo che lei preferisce ad m . Essendo le preferenze transitive, non può dunque accadere che w preferisca m al suo attuale partner. Possiamo concludere che il matching μ è stabile perché non esistono coppie che possano minacciare un divorzio.

□

In letteratura, l'algoritmo che abbiamo appena descritto prende il nome di “deferred acceptance algorithm”, denominazione che potremmo tradurre in italiano con “algoritmo di accettazione differita”. Tale dicitura si riferisce al comportamento delle donne, le quali inseriscono gli uomini che non vengono rifiutati immediatamente in una sorta di lista di attesa, senza mai accettarli in via definitiva fino al termine dell'algoritmo. Allo scopo di rendere più chiaro l'algoritmo di deferred acceptance, illustriamone in dettaglio il funzionamento attraverso lo stesso esempio dal quale siamo partiti.

Passo 1: Antonio, Ottavio e Ugo fanno una proposta di matrimonio a Bruna; Ettore e Ivan si propongono invece a Flavia. Bruna rifiuta Ottavio e Ugo e mette Antonio in lista d'attesa; Flavia rifiuta Ivan e mette Ettore in lista d'attesa. Riassumiamo il passo 1 dell'algoritmo nella tabella seguente, dove abbiamo evidenziato con una sottolineatura ed in grassetto le opzioni che le donne accettano temporaneamente:

B	C	D	F
<u>A</u>			<u>E</u>
O			I
U			

Passo 2: Ottavio, Ugo e Ivan, rifiutati al passo precedente, si propongono alle donne che compaiono in seconda posizione nella loro lista di preferenze, ovvero Flavia, Carla

e Diana, rispettivamente. Flavia, che riceve due proposte, rifiuta Ettore e mette Ottavio in lista d'attesa:

B	C	D	F
A	U	I	E O

Passo 3: Ettore, rifiutato al passo precedente, si propone alla sua seconda scelta, Carla, la quale lo mette in lista d'attesa, rifiutando Ugo:

B	C	D	F
A	U E	I	O

Passo 4: Ugo si propone alla sua terza scelta, Flavia, la quale lo rifiuta e continua a tenere Ottavio in lista d'attesa. A questo punto, essendo stato rifiutato da ogni donna per lui accettabile, Ugo rimane single ed il processo ha termine. Il matching finale che risulta dall'algoritmo è il seguente:

$$\mu_M = \begin{pmatrix} A & E & I & O & U \\ B & C & D & F & U \end{pmatrix}$$

Abbiamo denotato questo matching con μ_M per indicare che, nella procedura appena descritta, sono stati gli uomini a proporre matrimoni alle donne. È evidente che è possibile prendere in considerazione un secondo scenario, in cui i ruoli dei due insiemi di individui si invertono: le donne propongono matrimoni agli uomini, i quali possono accettare oppure rifiutare le proposte di matrimonio ricevute. Il matching che si ottiene in questo nuovo scenario è anch'esso stabile ma, in generale, diverso da quello ottenuto in precedenza. Denotiamo questo nuovo matching con μ_W .

Nell'esempio che stiamo analizzando, l'algoritmo in cui sono le donne a proporre i matrimoni agli uomini si conclude al secondo passo, producendo il seguente matching:

$$\mu_W = \begin{pmatrix} A & E & I & O & U \\ F & B & C & D & U \end{pmatrix}$$

Nel primo passo, infatti, ogni donna si propone alla propria prima scelta: Flavia si propone a Antonio, Bruna si propone a Ettore, Carla si propone a Ivan, Diana si propone a Ugo, che però la rifiuta. Nel secondo passo, Diana si propone allora a Ottavio e l'algoritmo si conclude. Come nel caso precedente, Ugo rimane single.

Fin qui abbiamo dimostrato l'esistenza di un matching stabile per ogni gioco delle coppie e analizzato l'algoritmo che ci permette di individuarlo, analizzando praticamente il suo funzionamento nel nostro esempio. Come puntualizzeremo più avanti, l'esempio ci permette di rispondere ad altre due domande che ci eravamo inizialmente posti: il matching stabile non è, in generale, unico e può essere individuato utilizzando una delle due versioni dell'algoritmo di *deferred acceptance*.

Analizziamo ora i due matching stabili ottenuti dalle due versioni dell'algoritmo di *deferred acceptance*. Ci chiediamo: gli individui coinvolti nel nostro gioco delle coppie sono soddisfatti degli abbinamenti prodotti dall'algoritmo? Quale dei due matching è preferito dagli uomini? E quale dalle donne?

Osserviamo che Antonio preferisce Bruna a Flavia; Ettore preferisce Carla a Bruna; Ivan preferisce Diana a Carla; Ottavio preferisce Flavia a sé stesso; Ugo è indifferente, restando single in entrambi i matching. Dall'esempio concludiamo, cioè, che gli uomini, unanimemente, preferiscono il matching μ_M al matching μ_W . Simmetricamente, è facile verificare che le donne preferiscono unanimemente μ_W al matching μ_M . Tali conclusioni non sono affatto scontate: di fatto, gli uomini competono tra loro per ottenere il matrimonio migliore e l'unanimità di giudizio sull'esito finale raramente è raggiunta in ambiti competitivi.

Le conclusioni a cui siamo giunti nell'esempio che ci ha guidati in questa presentazione hanno, in effetti, carattere generale nell'ambito del gioco delle coppie. Le presentiamo sinteticamente di seguito, riportando una sola dimostrazione.

1. Ogni gioco delle coppie presenta, in generale, più matching stabili. In generale, a meno di ordinamenti di preferenza molto particolari, i due matching prodotti dall'algoritmo di *deferred acceptance* sono distinti. Inoltre, non è difficile produrre esempi in cui ci sono altri matching stabili, oltre ai due prodotti dall'algoritmo. È molto citato in letteratura un esempio, riportato in [8] ma attribuito originariamente al matematico Donald Knuth, di un gioco delle coppie con soli quattro uomini e quattro donne che conta ben dieci matching stabili.
2. Se un individuo resta single in un matching stabile, allora resta single in qualunque altro matching stabile.
È il caso di Ugo nei due matching stabili μ_M e μ_W .
3. Ogni uomo $m \in M$ preferisce il matching μ_M , ottenuto quando sono gli uomini a proporre il matrimonio, al matching μ_W ottenuto, invece, quando sono le donne a proporre. Simmetricamente, ogni donna preferisce il matching μ_W al matching μ_M .

Si può dimostrare, in effetti, un risultato ancora più forte e sorprendente. Di fatto, il matching μ_M è il miglior matching stabile per gli uomini e, contemporaneamente, il peggior matching stabile per le donne; ovvero, abbina ogni uomo con la partner migliore che lui possa ottenere in ogni altro matching stabile e ogni donna con il partner peggiore che lei possa ottenere in ogni altro matching stabile. Allo stesso modo, il matching μ_W è il miglior matching stabile per le donne ma il peggiore per gli uomini. Nel gioco delle coppie si ha, quindi, una totale contrapposizione di interessi tra le due parti.

Quest'ultima proprietà, valida in generale per ogni gioco delle coppie, ha delle implicazioni rilevanti nelle applicazioni: accertato che la parte che propone ha sempre un vantaggio rispetto alla controparte che ha solo il diritto di accettare o rifiutare la proposta, chi decide quale ruolo assegnare a ciascuna delle due parti? Dimostriamo solo in parte il risultato sopra esposto. Ci sarà necessaria la seguente definizione.

Definizione 1. (Coppia reciprocamente ammissibile)

$(m, w) \in M \times W$ è una coppia reciprocamente ammissibile se esiste un matching stabile μ in cui m e w sono abbinati, ovvero $\mu(m) = w$ e $\mu(w) = m$.

- $m \in M$ si dice ammissibile per $w \in W$ se (m, w) è una coppia reciprocamente ammissibile.
- $w \in W$ si dice ammissibile per $m \in M$ se (m, w) è una coppia reciprocamente ammissibile.

Teorema 2. (Gale e Shapley, 1962)

In ogni gioco delle coppie, il matching μ_M , prodotto dall'algoritmo di deferred acceptance quando sono gli uomini a proporsi alle donne, è il miglior matching stabile per ciascun uomo. Simmetricamente, il matching μ_W , prodotto dall'algoritmo di deferred acceptance quando sono le donne a proporsi agli uomini, è il miglior matching stabile per ciascuna donna.

Dimostrazione. Proviamo che il matching μ_M è il miglior matching stabile per ciascun uomo.

Facciamo innanzitutto vedere che, nel corso dell'algoritmo di deferred acceptance con gli uomini che propongono matrimoni alle donne, nessun uomo m viene mai rifiutato da una donna w per lui ammissibile.

Procediamo per induzione sul numero di passi dell'algoritmo.

Supponiamo che fino al passo $k - 1$ nessun uomo venga mai rifiutato da una donna per lui ammissibile. Esaminiamo ora il passo k dell'algoritmo.

Supponiamo che la donna w rifiuti l'uomo m . Vogliamo provare che w non è ammissibile per m .

Se w rifiuta m , possono aversi due casi:

Caso 1: w rifiuta m perché m non è accettabile per w . In questo caso, m e w non possono risultare abbinati in alcun matching stabile perché la donna w divorzierebbe da m . Pertanto, m e w non sono reciprocamente ammissibili.

Caso 2: w rifiuta m perché c'è un uomo m' dal quale ha ricevuto una proposta di matrimonio in qualche passo precedente e che lei preferisce ad m ; ovvero, $m' >_w m$. m' , trovandosi nella lista d'attesa della donna w , preferisce w a qualsiasi altra donna, escluse quelle che lo hanno rifiutato nei passi precedenti (dal passo 1 al passo $k - 1$). Tali donne, per ipotesi induttiva, non sono ammissibili per m' . Supponiamo ora, per assurdo, che m e w siano abbinati in un qualche matching stabile μ ; ovvero:

$$\mu(m) = w \text{ e } \mu(w) = m.$$

Risulta che:

$$m' >_w m = \mu(w) \quad (1)$$

Inoltre, essendo la donna $\mu(m')$ ammissibile per m' , deve risultare:

$$w >'_m \mu(m') \quad (2)$$

Da (1) e da (2) segue che la coppia (m', w) ha inclinazione al divorzio e, pertanto, μ non è stabile.

Dall'assurdo, possiamo concludere che m e w non possono essere abbinati in alcun matching stabile e, pertanto, (m, w) non è reciprocamente ammissibile.

Per induzione, possiamo concludere che nell'algoritmo di Gale e Shapley, in cui gli uomini propongono matrimoni, nessun uomo è mai rifiutato da una donna ammissibile.

Da ciò si conclude che μ_M è il miglior matching stabile per ogni uomo, che è quanto volevamo provare. Seguendo un ragionamento analogo, si dimostra che il matching μ_W è il miglior matching stabile per ciascuna donna. $\square$

Dal gioco alla realtà

Negli ultimi quarant'anni, la teoria dei matching ha trovato largo impiego in molti campi.

Nel distretto di New York City, ogni anno, 75.000 studenti all'ottavo anno presentano domanda di ammissione in una delle 426 scuole superiori pubbliche della città. Fino a poco tempo fa, questo processo prevedeva che ogni studente sottomettesse un elenco di cinque scuole. Questi elenchi venivano inviati alle scuole, le quali decidevano quali candidati accettare, quali inserire in lista d'attesa e quali rifiutare. Agli studenti veniva quindi comunicato il loro status e concesso di accettare una sola offerta o una posizione in una lista d'attesa. Dopo che gli studenti avevano risposto alle eventuali offerte ricevute, le scuole con posti ancora vacanti venivano coinvolte in due ulteriori giri di offerte.

Tale procedura presentava diversi inconvenienti. Alla fine del terzo e ultimo giro di offerte, risultava che quasi la metà degli studenti, solitamente quelli con rendimento più basso provenienti da famiglie povere, non erano stati accettati in alcuna scuola. Molti di questi studenti attendevano una risposta per tutta l'estate solo per scoprire poi di essere stati assegnati a una scuola che non figurava nella propria lista di cinque preferenze. Il sistema incoraggiava anche gli studenti e le loro famiglie ad un comportamento strategico nella scelta delle scuole da inserire nella propria lista, costringendoli spesso a complicati giochi di mistificazione delle proprie preferenze; ne derivavano, da un lato, uno stato di generale confusione tra le famiglie e, dall'altro, un'inefficienza nel processo di assegnazione finale delle scuole. Le scuole tendevano, inoltre, a dichiarare di frequente una capacità inferiore a quella reale, nella speranza di poter assegnare posti a quegli studenti scontenti delle offerte ricevute inizialmente. Il clima di generale sfiducia verso tale procedura di assegnazione delle scuole spinse un gruppo di economisti, tra cui Abdulkadiroglu, Pathak, Roth e Sönmez [1, 2], a progettare un nuovo sistema di assegnazione, basato sulla teoria dei matching. Questo meccanismo centralizzato, implementato per la prima volta nel 2004, tiene conto delle preferenze degli studenti e delle priorità fissate da ciascun distretto scolastico (presenza di fratelli nello stesso istituto, distanza casa-scuola, punteggio a test di ammissione...) e riduce al minimo il numero di studenti assegnati a scuole che non avevano indicato nella propria lista, migliorando l'efficienza e la soddisfazione generale.

Balinski e Sönmez [3] hanno analizzato, dalla prospettiva della teoria dei matching, il sistema che la Turchia utilizza per ammettere gli studenti nelle varie univer-

sità presenti nel Paese. Tale sistema è centralizzato e gestito da un apposito ufficio di placement che organizza ogni anno un test standard che ogni studente interessato ad iscriversi all'università è tenuto a sostenere. Questo test comprende vari argomenti, dalla matematica alla comprensione verbale, dalle scienze alla logica. Ciascuna facoltà fissa quindi dei criteri, basandosi sui punteggi ottenuti negli argomenti di interesse per la facoltà stessa; ad esempio, la facoltà di ingegneria terrà maggiormente in conto i punteggi in matematica e scienze, la facoltà di economia quelli in matematica e comprensione verbale e così via.

Negli Stati Uniti più di 20.000 medici specializzandi e 4.000 ospedali sono abbinati ogni anno utilizzando un meccanismo centralizzato noto come National Residence Matching Problem⁴ (NRMP) che funziona sulla base dell'algoritmo di *deferred acceptance* con i medici specializzandi a ricoprire il ruolo di proponenti. Medici ed ospedali sottomettono le proprie preferenze e l'algoritmo procede con le assegnazioni. Maggiori dettagli su questo punto sono disponibili in Roth e Sotomayor [8].

Roth [6] ha anche analizzato l'evoluzione nel tempo del mercato di assegnazione dei medici specializzandi in diverse città della Gran Bretagna, osservando come i meccanismi che producono matching instabili nella maggior parte dei casi siano stati abbandonati a favore di procedure che assicurino matching stabili. L'analisi proposta da Roth è di fondamentale importanza per la teoria dei matching in quanto contribuisce a definire la stabilità come una proprietà chiave dei meccanismi di abbinamento in ogni problema applicativo della vita reale.

Piattaforme di ride-hailing come Uber e Lyft impiegano algoritmi di matching per abbinare passeggeri e autisti in tempo reale. Questi algoritmi considerano fattori come la distanza, la disponibilità e le preferenze dei passeggeri, ottimizzando i tempi di attesa e l'utilizzo dei veicoli.

Negli ultimi anni, la teoria dei matching ha trovato infine applicazione, significativa quanto inaspettata, nei programmi sanitari di scambio "crossover" di reni [7]. Pazienti in attesa di trapianto trovano, talvolta, un donatore vivente che, però, in molti casi, risulta immunologicamente incompatibile, rendendo impossibile un "trapianto diretto" paziente-donatore. Negli Stati Uniti è attiva dal 2004 una piattaforma (KPD, Kidney Paired Donation) che registra le coppie "paziente-donatore incompatibile" allo scopo di ricercare un opportuno scambio a catena dei donatori all'interno delle coppie e agevolare così uno scambio di organi che vada a beneficio di tutti i pazienti in attesa di un trapianto. Utilizzando algoritmi che individuano matching stabili, è possibile organizzare scambi tra più coppie di donatori e riceventi, aumentando significativamente il numero di trapianti che si concludono con un esito positivo. Negli Stati Uniti, il numero di pazienti che hanno ricevuto un rene da un donatore vivente è passato dalle poche decine di unità del 2004 a più di 7000 nel 2024. Di recente, questi programmi hanno trovato sviluppo anche in Europa: dal 2017 è attiva la South Alliance for Transplant (SAT), una rete internazionale che vede coinvolti Italia, Spagna, Francia e Portogallo con l'obiettivo di individuare programmi comuni di cooperazione per incrementare le risposte ai pazienti in attesa di ricevere un trapianto. Nel 2022 il Centro Nazionale Trapianti (CNT) e l'Alliance for Paired Kidney Donation (APKD), fondazione no

⁴Residents è il termine inglese per indicare gli specializzandi.

profit che gestisce uno dei programmi di trapianto di rene da vivente negli Stati Uniti, hanno sottoscritto un protocollo d'intesa sui trapianti di rene "crossover" con il quale coppie di pazienti italiani e statunitensi potranno essere incrociate tra di loro sulla base di un algoritmo condiviso che verificherà il livello di compatibilità tra gli iscritti nelle due liste d'attesa.

Qualche spunto per approfondimenti

Concludiamo il lavoro presentando qualche suggerimento per piccoli approfondimenti che non richiedono competenze matematiche avanzate e si prestano, pertanto, a scopi didattici.

Spunto 1: conteggio dei matching possibili e dei possibili ordinamenti di preferenza

La teoria dei matching si presta a svariate considerazioni legate al calcolo combinatorio, potenzialmente interessanti anche per avvicinare gli studenti a questo ambito della matematica. Presentiamo qui le due più immediate. Contiamo intanto quanti sono i matching possibili in un gioco delle coppie in cui siano presenti n uomini e m donne e gli individui possono restare single.

Sia k il numero di coppie che vogliamo formare; risulta $0 \leq k \leq \min\{n, m\}$. Scegliamo quindi quali tra gli n uomini vogliamo coinvolgere nelle coppie; abbiamo $\binom{n}{k}$ possibilità. Analogamente, scegliamo quali tra le m donne coinvolgere; abbiamo $\binom{m}{k}$ possibilità.

Poiché gli abbinamenti possibili tra questi k uomini e queste k donne sono $k!$, il numero totale di matching è dato da:

$$\sum_{k=0}^{\min\{n, m\}} \binom{n}{k} \binom{m}{k} k!$$

Chiediamoci ora quanti sono invece i possibili ordinamenti di preferenza in un gioco delle coppie in cui siano presenti n uomini e m donne e sia data la possibilità di restare single. Assumiamo inoltre che ciascun individuo sia forzato ad ordinare tutte le opzioni, incluse quelle non accettabili⁵.

Ciascun uomo deve ordinare $m + 1$ possibili opzioni; può farlo in $(m + 1)!$ modi possibili. Analogamente, ciascuna donna ha $n + 1$ opzioni da inserire nella propria lista di preferenze; gli ordinamenti possibili sono, quindi, $(n + 1)!$. Il numero dei possibili ordinamenti è pertanto dato da:

$$[(m + 1)!]^n [(n + 1)!]^m$$

⁵Il calcolo diventa leggermente più complicato se si assume, in termini più realistici, che ciascun individuo ordini soltanto le opzioni per lui accettabili.

Per comprenderne l'ordine di grandezza, proviamo a calcolare questo numero quando $n=3$ e $m=3$. Otteniamo:

$$(4!)^3(4!)^3 = 24^6 = 191102976$$

Il numero elevato dei possibili ordinamenti di preferenza non modifica la complessità dell'algoritmo di *deferredacceptance*, ma rende più complesso e costoso in termini di tempo e risorse il processo per generare dati e testare tutti i possibili scenari in applicazioni reali e/o simulazioni.

Spunto 2: la struttura algebrica dell'insieme dei matching stabili

L'insieme dei matching stabili di un gioco delle coppie ha una struttura algebrica molto ben delineata: costituisce, infatti, un reticolo.

In algebra, un **reticolo** è un insieme parzialmente ordinato $(R, \leq)$ tale che per ogni $x, y \in R$, il sottoinsieme $\{x, y\}$ ha sia estremo superiore che estremo inferiore in R . Indichiamo con $x \vee y$ l'estremo superiore di $\{x, y\}$ e con $x \wedge y$ l'estremo inferiore di $\{x, y\}$. Indichiamo con S l'insieme dei matching stabili di un gioco delle coppie. Definiamo il seguente ordinamento parziale su S : dati $\mu, \mu' \in S$:

$$\mu \leq \mu' \iff \mu(m) < \mu'(m) \text{ oppure } (m) = \mu'(m), \text{ per ogni } m \in M.$$

Dati $\mu, \mu' \in S$, definiamo $\mu \vee_M \mu'$ e $\mu \wedge_M \mu'$ come segue:

$$\begin{aligned} \mu \vee_M \mu' : M \cup W &\rightarrow M \cup W \\ (\mu \vee_M \mu')(m) &= \begin{cases} \mu(m), & \text{se } \mu(m) >_M \mu'(m); \\ \mu'(m), & \text{altrimenti} \end{cases} \\ (\mu \vee_M \mu')(w) &= \begin{cases} \mu(w), & \text{se } \mu(w) >_W \mu'(w); \\ \mu'(w), & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

$\mu \vee_M \mu'$ assegna a ciascun uomo la partner preferita tra le due che gli vengono assegnate dai matching μ e μ' e a ciascuna donna $w \in W$ il partner meno gradito tra $\mu(w)$ e $\mu'(w)$.

Seguendo un principio analogo, è possibile definire la funzione $\mu \wedge_M \mu'$. Tale funzione associa a ciascun uomo $m \in M$ la partner meno preferita tra le due assegnate da μ e μ' e a ciascuna donna $w \in W$ il partner preferito tra i due che le vengono assegnati da μ e μ' .

È possibile dimostrare che, se μ e μ' sono matching stabili, allora $\mu \vee_M \mu'$ e $\mu \wedge_M \mu'$ sono entrambi matching stabili⁶. $(S, \leq)$ è quindi un reticolo. I due matching stabili μ_M e μ_W rappresentano, rispettivamente, il minimo e il massimo di tale reticolo.

⁶Eliminando l'ipotesi che μ e μ' siano stabili, perdiamo persino la garanzia che $\mu \wedge_M \mu'$ e $\mu \vee_M \mu'$ siano matching. Può accadere, ad esempio, che $\mu \vee_M \mu'$ assegni la stessa donna a due uomini diversi; ovvero:

$$(\mu \vee_M \mu')(m) = (\mu \vee_M \mu')(m') \text{ per } m, m' \in M \text{ con } m \neq m'.$$

Spunto 3: come mediare tra i due matching stabili μ_M e μ_W ?

Abbiamo visto che, in un gioco delle coppie, i matching ottenuti dalle due versioni dell'algoritmo di *deferred acceptance*, pur essendo entrambi stabili, hanno il non trascurabile difetto di trattare le due parti in maniera estremamente iniqua.

In letteratura sono stati proposti diversi matching alternativi che possano garantire ad entrambi gli insiemi, M ed W , un livello di equità superiore a quello garantito da μ_M e μ_W .

Analizziamo qui quello proposto da Gusfield e Irving [5], basato su una semplice quantificazione dell'"invidia" provata da ciascun individuo. Dato un matching μ e un individuo $x \in M \cup W$, consideriamo il suo partner $\mu(x)$ nel matching μ e contiamo quanti sono gli individui che precedono $\mu(x)$ nell'ordinamento di preferenza di x , ovvero, gli individui che x preferisce a $\mu(x)$. Questo numero, che denoteremo con $Rank \mu(x)$, fornisce una stima dell'invidia provata dall'individuo x quando si realizza il matching μ .

Associamo al matching μ la seguente quantità:

$$\delta(\mu) = \left| \sum_{x \in M} Rank \mu(x) - \sum_{y \in W} Rank \mu(y) \right|$$

Tale quantità rappresenta la differenza tra il livello aggregato di invidia degli uomini, rappresentato dalla quantità $\sum_{x \in M} Rank \mu(x)$, e quello delle donne, misurato invece dalla seconda sommatoria. Tra tutti i matching stabili del gioco delle coppie in esame, consideriamo quello (non necessariamente unico) che minimizza la quantità δ :

$$\mu = \arg \min_{\mu \in S} \delta(\mu).$$

Bibliografia

- [1] Abdulkadiroğlu, A., Sönmez, T., School Choice: a mechanism design approach. *The American Economic Review* 93, 29–747, 2003.
- [2] Abdulkadiroğlu, A., Pathak, P.A., Roth, A.E., The New York City high school match. *The American Economic Review* 95, 364–367, 2005.
- [3] Balinski, M., Sönmez, T., A tale of two mechanisms: student placement. *Journal of Economic Theory* 84, 73–94, 1999.
- [4] Gale, D., Shapley, L.S., College admissions and the stability of marriage. *American Mathematics Monthly* 69, 9-15, 1962.
- [5] Gusfield, D., Irving, R. W., The stable marriage problem: structure and algorithms. The MIT Press, 1989.
- [6] Roth, A. E., A natural experiment in the organization of entry-level labor markets: Regional markets for new physicians and surgeons in the United Kingdom. *The American Economic Review* 81, 415-440, 1991.

-
- [7] Roth, A.E., Sönmez, T., Ünver M.U., Kidney exchange. *Quarterly Journal of Economics* 119, 457-488, 2004.
 - [8] Roth, A. E., Sotomayor, M. O. Two-sided matching. A study in game-theoretic modeling and analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

Ortocentro, circocentro, baricentro e retta di Eulero

Orthocentre, circumcentre, centroid and Euler line

F. Dell’Orto¹, F. Fericola² e M. Parisi³

Abstract

Questo articolo nasce con l’intento di uniformare le relazioni che individuano le coordinate del baricentro di un triangolo a quelle già note per ortocentro e circocentro e pubblicate su questa stessa rivista, in un numero precedente. Le relazioni che metteremo in evidenza, utilizzano la nozione di determinante di una matrice di ordine 3; inoltre mostreremo che esse sono uguali a quelle classiche riportate sui testi. Il vantaggio della scrittura di ortocentro, circocentro e baricentro mediante relazioni che coinvolgono il determinante di una matrice, culmina in una dimostrazione di natura puramente algebrica dell’allineamento dei punti menzionati (retta di Eulero).

Introduzione

Nel lavoro pubblicato sulla rivista *Periodico di Matematiche* 100, 1-2 (2024), pp.11-20 sono state messe in evidenza relazioni relative alle coordinate di ortocentro e circocentro. Lo studio fatto nel citato articolo nasce con l’intento di trovare delle formule per determinare le coordinate dell’ortocentro e del circocentro, in funzione delle coordinate dei vertici, senza coinvolgere equazioni di rette o sistemi di equazioni lineari. Il contenuto di questo articolo pone la sua attenzione sul baricentro di un triangolo e si pone come obiettivo quello di mettere in evidenza delle formule in linea con quelle relative a ortocentro e circocentro. Vedremo che scrivendo in maniera opportuna, mediante rapporto di determinanti, le coordinate di ortocentro, baricentro e circocentro riusciremo a dimostrare per via algebrica che la retta che passa per *ortocentro* e *circocentro* ha lo stesso coefficiente angolare della retta passante per *ortocentro* e *baricentro* e questo proverà l’allineamento dei tre punti.

¹Liceo "Assteas" Buccino (SA)

²Liceo "Assteas" Buccino (SA)

³Liceo "Assteas" Buccino (SA)

Definizione 1. Si chiama baricentro di un triangolo il punto di incontro delle tre mediane.

Proposizione 1. Se in un sistema di riferimento monometrico cartesiano sono dati tre punti non allineati, $A \equiv (a, b)$, $B \equiv (c, d)$, $C \equiv (e, f)$ le coordinate del baricentro $G \equiv (G_x, G_y)$ possono essere espresse nel seguente modo:

$$G_x = \frac{1}{3} \frac{\begin{vmatrix} a^2 - ce & b & 1 \\ c^2 - ae & d & 1 \\ e^2 - ac & f & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}} \quad G_y = \frac{-1}{3} \frac{\begin{vmatrix} b^2 - df & a & 1 \\ d^2 - bf & c & 1 \\ f^2 - bd & e & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}}$$

$$G_x = \frac{1}{3} \frac{\begin{vmatrix} a^2 - ce & b & 1 \\ c^2 - ae & d & 1 \\ e^2 - ac & f & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}} \quad G_y = \frac{-1}{3} \frac{\begin{vmatrix} b^2 - df & a & 1 \\ d^2 - bf & c & 1 \\ f^2 - bd & e & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}}$$

Dimostrazione. Il punto medio di BC è dato da $A' \equiv \left(\frac{c+e}{2}, \frac{d+f}{2}\right)$ e la retta AA' ha equazione:

$$(2b - d - f)x + (c + e - 2a)y - b(c + e) + a(d + f) = 0.$$

Il punto medio del lato AC è dato da $B' \equiv \left(\frac{a+e}{2}, \frac{b+f}{2}\right)$, la retta per BB' ha equazione:

$$(2d - b - f)x + (a + e - 2c)y - d(a + e) + c(b + f) = 0.$$

In corrispondenza del seguente sistema lineare si trovano le coordinate del baricentro:

$$\begin{cases} (2b - d - f)x + (c + e - 2a)y = b(c + e) - a(d + f) \\ (2d - b - f)x + (a + e - 2c)y = d(a + e) - c(b + f) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (2b - d - f) & (c + e - 2a) \\ (2d - b - f) & (a + e - 2c) \end{vmatrix} = 3be - 3de + 3ad - 3bc - 3af + 3cf = ?$$

$$= 3a(d - f) - 3c(b - f) + 3e(b - d) = 3 \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b(c + e) - a(d + f) & (c + e - 2a) \\ d(a + e) - c(b + f) & (a + e - 2c) \end{vmatrix} =$$

$$= be^2 - de^2 - bc^2 + a^2d - a^2f + c^2f + abe - afe - cde + cfe - abc + acd =$$

$$\begin{aligned}
 &= a^2(d-f) - c^2(b-f) + e^2(b-d) - [ce(d-f) - ae(b-f) + ac(b-d)] = \\
 &= \begin{vmatrix} a^2 & b & 1 \\ c^2 & d & 1 \\ e^2 & f & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ce & b & 1 \\ ae & d & 1 \\ ac & f & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 - ce & b & 1 \\ c^2 - ae & d & 1 \\ e^2 - ac & f & 1 \end{vmatrix}. \\
 \Delta_y &= \begin{vmatrix} (2b-d-f) & b(c+e) - a(d+f) \\ (2d-b-f) & d(a+e) - c(b+f) \end{vmatrix} = \\
 &= b^2e - d^2e + ad^2 - b^2c - af^2 + cf^2 + bfe - dfe + abd - abf - bcd + cdf = \\
 &= -[b^2(c-e) - d^2(a-e) + f^2(a-c)] + [(df(c-e) - bf(a-e) + bd(a-c))] = \\
 &= -\begin{vmatrix} b^2 & a & 1 \\ d^2 & c & 1 \\ f^2 & e & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} df & a & 1 \\ bf & c & 1 \\ bd & e & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b^2 - df & a & 1 \\ d^2 - bf & c & 1 \\ f^2 - bd & e & 1 \end{vmatrix}. \\
 G_x = \frac{\Delta_x}{\Delta} &= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} a^2 - ce & b & 1 \\ c^2 - ae & d & 1 \\ e^2 - ac & f & 1 \end{vmatrix} \quad G_y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-1}{3} \begin{vmatrix} b^2 - df & a & 1 \\ d^2 - bf & c & 1 \\ f^2 - bd & e & 1 \end{vmatrix} \\
 &\quad \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Resta così provata la tesi. □

CASI PARTICOLARI:

Nello scrivere l'equazione della mediana per AA':

$$(2b - d - f)x + (c + e - 2a)y - b(c + e) + a(d + f) = 0.$$

Se $2b - d - f = 0$, allora $d + f = 2b$ e l'equazione della mediana diventa

$$(c + e - 2a)y - b(c + e) + 2ab = 0 \Rightarrow (c + e - 2a)y - b(c + e - 2a) = 0$$

Necessariamente $c + e - 2a \neq 0$, altrimenti $A = A'$. Possiamo concludere che il baricentro G si trova sulla retta $y = b$ e quindi $A' \equiv \left(\frac{c+e}{2}, b\right)$.

In modo analogo si discutono gli altri casi relativi all'annullamento dei coefficienti di x o y delle equazioni che rappresentano le bisettrici.

Osservazione 1. Le relazioni scritte mediante la nozione di determinante sono equivalenti a quelle che si è soliti trovare sui testi:

$$G_x = \frac{a+c+e}{3} \quad G_y = \frac{b+d+f}{3}$$

Per provare tale equivalenza applicheremo in primo luogo delle proprietà sulle righe che non cambiano il determinante e infine svilupperemo il determinante con la regola di Laplace utilizzando l'ultima la colonna che conterrà degli zeri riconducendo il calcolo ad un determinante di matrice di ordine 2.

$$G_x = \frac{1}{3} \frac{\begin{vmatrix} a^2 - ce & b & 1 \\ c^2 - ae & d & 1 \\ e^2 - ac & f & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}}$$

$$G_y = \frac{-1}{3} \frac{\begin{vmatrix} b^2 - df & a & 1 \\ d^2 - bf & c & 1 \\ f^2 - bd & e & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}}$$

$$G_x = \frac{1}{3} \frac{\begin{vmatrix} a^2 - ce & b & 1 \\ c^2 - ae - a^2 + ce & d - b & 0 \\ e^2 - ac - a^2 + ce & f - b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c - a & d - b & 0 \\ e - a & f - b & 0 \end{vmatrix}}$$

$$G_y = \frac{-1}{3} \frac{\begin{vmatrix} b^2 - df & a & 1 \\ d^2 - bf - b^2 + df & c - a & 0 \\ f^2 - bd - b^2 + df & e - a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c - a & d - b & 0 \\ e - a & f - b & 0 \end{vmatrix}}$$

$$G_x = \frac{1}{3} \frac{\begin{vmatrix} (c-a)(c+a) + e(c-a) & d-b \\ (e-a)(e+a) + c(e-a) & f-b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c-a & d-b \\ e-a & f-b \end{vmatrix}}$$

$$G_y = \frac{-1}{3} \frac{\begin{vmatrix} (d-b)(d+b) + f(d-b) & c-a \\ (f-b)(f+b) + d(f-b) & e-a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c-a & d-b \\ e-a & f-b \end{vmatrix}}$$

$$G_x = \frac{1}{3} \frac{\begin{vmatrix} (a+c+e)(c-a) & d-b \\ (a+c+e)(e-a) & f-b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c-a & d-b \\ e-a & f-b \end{vmatrix}}$$

$$G_y = \frac{-1}{3} \frac{\begin{vmatrix} (b+d+f)(d-b) & c-a \\ (b+d+f)(f-b) & e-a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c-a & d-b \\ e-a & f-b \end{vmatrix}}$$

$$G_x = \frac{a+c+e}{3} \frac{\begin{vmatrix} c-a & d-b \\ e-a & f-b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c-a & d-b \\ e-a & f-b \end{vmatrix}} = \frac{a+c+e}{3}$$

$$G_y = \frac{b+d+f}{3} \frac{\begin{vmatrix} c-a & d-b \\ e-a & f-b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c-a & d-b \\ e-a & f-b \end{vmatrix}} =$$

$$\frac{b+d+f}{3}$$

Ed ecco ritrovate le formule note: $G = \left(\frac{a+c+e}{3}, \frac{b+d+f}{3} \right)$

Proposizione 2. Se in un sistema di riferimento monometrico cartesiano sono dati tre punti non allineati $A \equiv (a, b)$, $B \equiv (c, d)$, $C \equiv (e, f)$ le coordinate del baricentro $G \equiv (G_x, G_y)$, ortocentro $K \equiv (K_x, K_y)$ e circocentro $H \equiv (H_x, H_y)$ appartengono tutti alla stessa retta.

Prima di dimostrare per via algebrica la proposizione appena enunciata in primo luogo riprendiamo le due relazioni pubblicate su *PdM 100*, 1-2 (2024), pp.11—20 che riguardano l'ortocentro e il circocentro:

$$K_x = - \frac{\begin{vmatrix} b^2 + ce & b & 1 \\ d^2 + ae & d & 1 \\ f^2 + ac & f & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}}$$

$$K_y = \frac{\begin{vmatrix} a^2 + df & a & 1 \\ c^2 + bf & c & 1 \\ e^2 + bd & e & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}}$$

$$H_x = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} a^2 + b^2 & b & 1 \\ a^2 + b^2 & d & 1 \\ a^2 + b^2 & f & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}} \quad H_y = \frac{-1}{2} \frac{\begin{vmatrix} a^2 + b^2 & a & 1 \\ a^2 + b^2 & c & 1 \\ a^2 + b^2 & e & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}}$$

Per apprezzarne meglio la simmetria delle relazioni e per uno scopo utile alla dimostrazione della proposizione appena enunciata, legate all'etichettatura di tali quantità che sarà abbastanza naturale, adotteremo un cambio di notazione e anziché indicare con $A \equiv (a, b)$, $B \equiv (c, d)$, $C \equiv (e, f)$ i punti di un piano cartesiano utilizzeremo la notazione $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$, $C \equiv (x_3, y_3)$. Sulla base di tale cambio le formule per ortocentro, circocentro e circocentro diventano:

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{\begin{vmatrix} y_1^2 + x_2x_3 & y_1 & 1 \\ y_2^2 + x_1x_3 & y_2 & 1 \\ y_3^2 + x_1x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} & K_y &= \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 + y_2y_3 & x_1 & 1 \\ x_2^2 + y_1y_3 & x_2 & 1 \\ x_3^2 + y_1y_2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} \\ H_x &= \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} & H_y &= \frac{-1}{2} \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} \\ G_x &= \frac{1}{3} \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 - x_2x_3 & y_1 & 1 \\ x_2^2 - x_1x_3 & y_2 & 1 \\ x_3^2 - x_1x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} & G_y &= \frac{-1}{3} \frac{\begin{vmatrix} y_1^2 - y_2y_3 & x_1 & 1 \\ y_2^2 - y_1y_3 & x_2 & 1 \\ y_3^2 - y_1y_2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

Avvalendosi delle proprietà dei determinanti possiamo riscriverli nel seguente modo

$$K_x = \frac{\begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2x_3 & y_1 & 1 \\ x_1x_3 & y_2 & 1 \\ x_1x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} \quad K_y = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_2y_3 & x_1 & 1 \\ y_1y_3 & x_2 & 1 \\ y_1y_2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
H_x &= \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} & H_y &= \frac{-1}{2} \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1^2 & x_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2 & 1 \\ y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} \\
G_x &= \frac{1}{3} \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 x_3 & y_1 & 1 \\ x_1 x_3 & y_2 & 1 \\ x_1 x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} & G_y &= \frac{-1}{3} \frac{\begin{vmatrix} y_1^2 & x_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2 & 1 \\ y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_2 y_3 & x_1 & 1 \\ y_1 y_3 & x_2 & 1 \\ y_1 y_2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}
\end{aligned}$$

In alto abbiamo somme e rapporti di numeri che verranno denotati in modo conveniente assegnando a ciascun determinante il simbolo corrispondente che ne rappresenterà il valore e in tale assegnazione entra in gioco anche la simmetria delle relazioni e sarà abbastanza naturale tale associazione tra simbolo e valore del determinante. Utilizzeremo la seguente notazione (quella che in precedenza abbiamo menzionato come etichettatura del tutto arbitraria):

$$K = \left(\frac{-Y^2+X}{\Delta}, \frac{X^2+Y}{\Delta} \right), \quad H = \left(\frac{XY+Y^2}{2\Delta}, -\frac{X^2+YX}{2\Delta} \right), \quad G = \left(\frac{XY-X}{3\Delta}, -\frac{YX-Y}{3\Delta} \right)$$

Abbiamo tutto per concludere e provare la tesi della proposizione, a tale scopo è sufficiente osservare che le rette per $KHeKG$ hanno lo stesso coefficiente angolare.

$$m_{KH} = \frac{\frac{X^2+Y}{\Delta} + \frac{X^2+YX}{2\Delta}}{\frac{-Y^2+X}{\Delta} - \left(\frac{XY+Y^2}{2\Delta} \right)} = \frac{\frac{2X^2+2Y+X^2+YX}{2\Delta}}{\frac{-2Y^2-2X-XY-Y^2}{2\Delta}} = \frac{3X^2+2Y+YX}{-3Y^2-2X-XY}$$

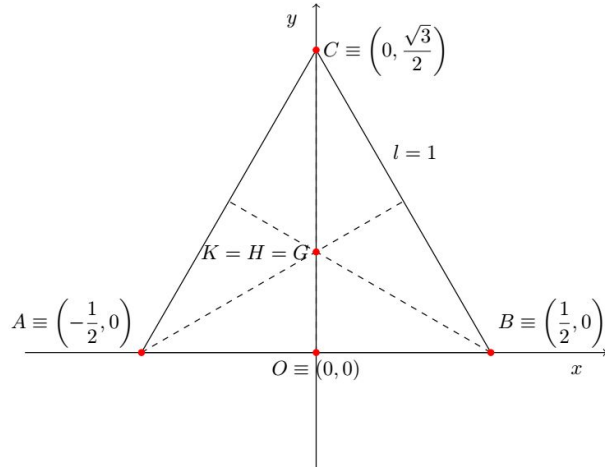
$$m_{KG} = \frac{\frac{X^2+Y}{\Delta} + \frac{YX-Y}{3\Delta}}{\frac{-Y^2+X}{\Delta} - \left(\frac{XY-X}{3\Delta} \right)} = \frac{\frac{3X^2+3Y+YX-Y}{3\Delta}}{\frac{-3Y^2-3X-XY+X}{3\Delta}} = \frac{3X^2+2Y+YX}{-3Y^2-2X-XY}$$

Osserviamo che $m_{KH} = m_{KG}$ e la tesi è provata.

Osservazione conclusiva relativa a Ortocentro, Circocentro e Baricentro

Vogliamo verificare la bontà delle relazioni in un caso speciale a noi noto. Supponiamo che le coordinate dei vertici del triangolo siano $A \equiv \left(-\frac{1}{2}, 0 \right)$, $B \equiv \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$ e

$C \equiv \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. In questo caso si tratta di triangolo equilatero di lato $l = 1$ e l'altezza $valch = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Sappiamo da condizioni puramente geometriche che la misura del segmento CG misura il doppio del segmento OG .



Possiamo dunque concludere che le coordinate di ortocentro, circocentro e baricentro sono date dalle seguenti coordinate:

$$K = H = G \equiv \left(0, \frac{\sqrt{3}}{6}\right).$$

$$K_x = \frac{\begin{vmatrix} b^2 + ce & b & 1 \\ d^2 + ae & d & 1 \\ f^2 + ac & f & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}}, \quad K_y = \frac{\begin{vmatrix} a^2 + df & a & 1 \\ c^2 + bf & c & 1 \\ e^2 + bd & e & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}}$$

$$H_x = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} a^2 + b^2 & b & 1 \\ a^2 + b^2 & d & 1 \\ a^2 + b^2 & f & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}}, \quad H_y = \frac{-1}{2} \frac{\begin{vmatrix} a^2 + b^2 & a & 1 \\ a^2 + b^2 & c & 1 \\ a^2 + b^2 & e & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}}$$

$$G_x = \frac{1}{3} \frac{\begin{vmatrix} a^2 - ce & b & 1 \\ c^2 - ae & d & 1 \\ e^2 - ac & f & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}} \quad G_y = \frac{-1}{3} \frac{\begin{vmatrix} b^2 - df & a & 1 \\ d^2 - bf & c & 1 \\ f^2 - bd & e & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}}$$

Sostituendo in modo opportuno nelle relazioni in alto $A \equiv \left(\frac{-1}{2}, 0\right)$, $B \equiv \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $C \equiv \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, si ottiene:

$$K_x = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-0}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0 \quad K_y = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{-1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

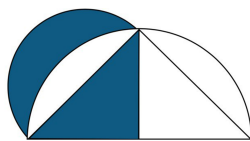
$$H_x = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0 \quad H_y = \frac{-1}{2} \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$G_x = \frac{1}{3} \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0 \quad G_y = \frac{-1}{3} \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{\frac{-3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Bibliografia

- [1] Vincenzi, Giovanni: When is a Triangle Bisected by its Euler Line?; Journal for Geometry and Graphic. Volume 28 (2024), No. 1, 131–136
- [2] Ambrisi, Emilio. "GEOMETRIA EUCLIDEA DOPO EUCLIDE." Periodico di Matematiche 2 (2004).
- [3] Verardi, Libero. "La retta d'Eulero." IPOTESI 7 (2004): 7-10.
- [4] Anzalone, Antonino. "L'ortocentro ei teoremi di Euclide." Archimede: 4, 2013 (2013): 185-190.
- [5] Fericola, F. Circocentro e Ortocentro di un triangolo. Periodico di Matematiche 100, 1-2 (2024), pp.11—20

- [6] Bernardi, Claudio. "Un problema da discutere: l'ortocentro di un triangolo." *Archimede*: gennaio/marzo 2009 (2009): 1000-1007.
- [7] Di Gennaro, Fernando, and Franco Eugeni. "La retta di Eulero in un piano pseudoeuclideo di ordine dispari." *Atti del Congresso Nazionale Mathesis*. 1997.
- [8] Anzalone, Antonino. "Il triangolo degli ortocentri." *Archimede*: 2, 2015 (2015): 67-71.
- [9] Fera, Giuseppe. "Su alcuni punti notevoli del tetraedro." *Archimede*: 4, 2014 (2014): 172-179.



Mathesis

Presidente

Domenica Di Sorbo

È presidente dal 24 febbraio 2024.

presidente-disorbo@mathesisnazionale.it

Consiglio Nazionale

Salvatore Cuomo *vice presidente*, Maria Coccozza *segretaria*, Roberto Franzina *tesoriere*, Serenella Iacino, Vincenzo Iorfida, Mina Lavopa, Susy Osti, Marcello Pedone, Francesco Sicolo, Pasqualina Ventrone *consiglieri*.

Sezioni

Abruzzo – Avellino – Bari – Brescia – Caserta – Castellamare di Stabia – Catania – Crotone – Ferrara – Firenze – Grottaglie – Latina – Lecce – Mantova – Messina – Milano – Mondragone – Napoli – Napoli Flegrea – Olbia – Roma – Rovigo – Salerno – Serra San Bruno – Spoleto – Terni – Udine – Varese – Venezia – Verona – Vicenza.

Rivista

Periodico di Matematiche

Dal 1886 Periodico di Matematica, dal 1921 "di Matematiche". La proprietà della testata è della Mathesis dal 2012 per concessione dell'Editore Zanichelli.

Sito web

www.mathesisnazionale.it

ISSN 1582-8832

MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche

c/o Dipartimento di Matematica e Fisica

Università degli Studi della Campania "Luigi Vanvitelli"

Viale Abramo Lincoln 5 - 81100 Caserta (CE)

www.mathesisnazionale.it • info@mathesisnazionale.it