ASSOCIAZIONE NAPOLETANA

FILOSOFIA

E SCIENZE UMANE

"RENATO CACCIOPPOLI"

QUADERNI CACCIOPPOLI

A cura di

Gondeberga De Rubertis

Giuseppina Maria Castaldo

Giuseppe Mangione

Anno 1- Numero 2

Settembre 2023

"Non ho

certezze al massimo

probabilità"

Renato Caccioppoli

Associazione Napoletana Filosofia e Scienze Umane

ANFSU

Renato Caccioppoli

ASSOCIAZIONE NAPOLETANA FILOSOFIA

E SCIENZE UMANE

"RENATO CACCIOPPOLI"

QUADERNI CACCIOPPOLI

A cura di G.M. Castaldo, G. De Rubertis, G. Mangione

Anno 1- Numero 2 - Settembre 2023

INDICE

Editoriale

Associazione Napoletana di Filosofia e Scienze Umane "Renato Caccioppoli" (A.N.F.S.U.)

Ferdinando Casolaro

presidente.anfsu@liceocaccioppoli.edu.it

Questo fascicolo contiene i lavori presentati il 27 maggio 2023 al XVI° Convegno

"Studenti in cattedra, docenti nei banchi", attività che dal 2007 si svolge nell'ultima settimana di maggio a Castellammare di Stabia per la Premiazione degli studenti vincitori dei Giochi matematici per la Scuola "Premio Aldo Morelli".

Il Convegno, che vede come relatori solo studenti coordinati dai propri docenti, nei primi anni trattava esclusivamente di Matematica. Con la fondazione della nostra associazione, che pone come pilastro fondamentale l'interdisciplinarità, ospita conferenze e descrizione di attività di ogni disciplina al fine di ampliare la Didattica STEAM (Science Technology Engineering Art Mathematics) con il contributo delle altre discipline oggetto dell'insegnamento nella Scuola.

- *NAPOLI A STELLE E STRISCE 1° ottobre 1943: gli americani sbarcano nella città di Napoli.*

Così, due studenti della classe V° C del Liceo Scientifico "R. Caccioppoli" di Napoli introducono il primo articolo che tratta di un periodo storico-letterario "Neorealismo a Napoli" che, purtroppo, nelle scuole è quasi totalmente ignorato.

Come ho già accennato nell'editoriale del n. 1-aprile 2023, uno degli obiettivi della nostra associazione è la divulgazione della storia dal secondo dopoguerra ad oggi, al fine di stimolare i docenti a trattare l'argomento nell'insegnamento.

Dall'articolo si evince che la nostra proposta è stata recepita ed è sicuramente motivo di soddisfazione valutare come gli studenti affrontino il tema relativo all'occupazione americana nel Mediterraneo, che conduce ad analogie tra la storia di quel periodo e i tragici eventi di oggi.

Come prassi della nostra rivista, i redattori Castaldo, De Rubertis e Mangione si sono proposti di evitare il più possibile articoli come temi isolati; precisamente, si cerca di costruire una continuità tra i lavori da pubblicare per rendere il più possibile esaustiva la trattazione dei temi che si affrontano.

Pertanto, nella prima parte del presente fascicolo, al citato articolo sul neorealismo seguono:

- la recensione da parte degli studenti della V° F del liceo "Caccioppoli" del libro di L.Foschini "*L'attrito della vita*" a seguito dell'incontro con l'autrice,

- l'articolo - redatto da tre studenti della V° Q dell'ITIS "G. Ferraris" - su un tema, indicato con "*Voci del dissenso. Un itinerario tra Caccioppoli, Pasolini e De André",* che accomuna tre grandi protagonisti della cultura italiana della seconda metà del 'Novecento': un matematico, un letterato, un artista, a dimostrazione del carattere interdisciplinare dei nostri lavori.

- "*Riflessioni sulla guerra*", a cura degli alunni della V° C dell'ITIS "G. Ferraris" di Napoli, che richiamano un epistolario tra Albert Einstein e Sigmund Freud, rilevando alcune analogie con il pensiero di Immanuel Kant sul tema della guerra, oggi purtroppo attuale.

Sono poi pubblicati due lavori - presentati al Convegno di C.mmare di Stabia - che riguardano approfondimenti di matematica da parte di uno studente dell'Istituto "Assteas" di Buccino e di due alunni del liceo "Labriola"di Napoli".

Nella seconda sezione del fascicolo, che si propone di condividere contributi dei docenti sulla didattica interdisciplinare, è presente un interessante articolo del prof. Arcangelo Passarella del liceo scientifico "R.Caccioppoli" di Napoli su *Robotica, Matematica e Decisioni Strategiche: Un'Introduzione alla Teoria dei Giochi nella Scuola Superiore*

Infine, come di consueto, di condivide un'Unità didattica di apprendimento interdisciplinare, ancora di Ed. Civica, ma rivolta alle classi quinte delle scuole superiori di secondo grado: "*Il Tempo, un bene comune*"

Fattorizzazione e trinomio riconducibile a quadrato di binomio

A cura dello studente **G. Forlenza**

dell'Istituto Assteas di Buccino

classe 1A del Liceo Scientifico Tradizionale.

Coordinato dal prof. **F. Fernicola**

27 Maggio 2023

Abstract

In questo articolo parliamo di polinomi del tipo $p(x) = ax^2 + bx + c$, *con* $a \neq 0$ *e* $M.C.D.(a,b,c) = 1$. *Vedremo sotto quali condizioni tali trinomi sono fattorizzabili in* $\mathbb{Z}$ *e daremo una caratterizzazione dei trinomi riconducibili a quadrato di binomio.*

Introduzione

Questo lavoro è stato presentato all'interno del Convegno Giochi Matematici per la Scuola "Premio Aldo Morelli" presso Gragnano ed è stata un'occasione di alta valenza formativa perché non solo ha dato la possibilità ad uno studente di misurarsi con una presentazione di un argomento di Algebra esponendolo ad un pubblico di specialisti, allo stesso tempo su tutti gli studenti ha funzionato da stimolo nel confrontarsi sulle varie tematiche esposte. Mi sembra opportuno sottolineare che tali iniziative devono essere sempre alimentate con il massimo entusiasmo a memoria e in onore della figura del Prof. Aldo Morelli, che è stato un punto di riferimento per molti studiosi che si sono formati seguendo il filone della didattica della matematica.

Precisiamo che quando scriveremo un trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ senza ulteriori chiarimenti intenderemo $a > 0$, $b,c \in Z^*$ e $M.C.D(a,b,c) = 1$ ovvero ci riferiamo a trinomi primitivi. L'intento è quello di caratterizzare quelli fattorizzabili in $Z[x]$ e quelli riconducili a quadrato di binomio mediante il discriminate $\Delta = b^2 - 4ac$.

Trinomi e relativa fattorizzazione

Lemma 1. *Sia assegnato il trinomio* $p(x) = ax^2 + bx + c$ con $\Delta = 0$, *allora* $M.C.D(a,c) = 1$.

Proof. Supponiamo per assurdo che $M.C.D(a,c) = M > 1$, allora $M|a$ e $M|c$ ovvero esistono $h,k \in N^*$ con $a = M \cdot h$ e $c = M \cdot k$.

Poiché $b^2 = 4ac \Rightarrow b^2 = 4(M \cdot h)(M \cdot k) \Rightarrow b^2 = 4hkM^2 \Rightarrow M^2 | b^2 \Rightarrow M|b$, allora possiamo concludere che $M.C.D(a,b,c) = M > 1$ e questo è assurdo perché il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ è primitivo. □

Lemma 2. *Se* $a|b \cdot c$ e $M.C.D.(a,b) = 1$, *allora* $a|c$.

Proof. Sappiamo che $M.C.D.(a,b) = 1$ e quindi per il teorema di Bezout esistono u,v interi con $1 = au + bv \Rightarrow c = acu + bcv$. Sappiamo per ipotesi che $a|b \cdot c$, allora esiste $r \in Z^*$ tale che $bc = ra$ e quindi sostituendo nella relazione precedente $c = acu + rav = a(cu + rv)$, l'ultima relazione dice che $a|c$ da cui segue la tesi. □

Ora proviamo che vale la seguente:

Proposizione 1. *Assegnato il trinomio* $p(x) = ax^2 + bx + c$ *primitivo con* $a > 0$ e $\Delta = n^2$ *con* $n > 0$ e $n \in N$, *allora esso è fattorizzabile in* Z.

Proof. Sappiamo che vale la seguente relazione:

$$p(x) = ax^2 + bx + c = \left(ax + \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Osserviamo immediatamente che da $\Delta + 4ac = b^2$ segue che Δ e b^2 hanno la stessa parità e lo stesso dicasi per $\sqrt{\Delta}$ e b e di conseguenza le quantità $n_1 = \frac{b}{2} + \frac{n}{2}$ e $n_2 = \frac{b}{2} - \frac{n}{2}$ sono numeri interi. La fattorizzazione si può scrivere nel seguente modo: $p(x) = ax^2 + bx + c = (ax + n_1)\left(x + \frac{n_2}{a}\right)$

Indichiamo con $s = M.C.D.(a,n_1)$, allora $\frac{a}{s} = h$ e $\frac{n_1}{s} = k$ con $M.C.D.(h,k) = 1$. Possiamo scrivere $p(x) = ax^2 + bx + c = s(hx + k)\left(x + \frac{n_2}{sh}\right)$. Se proviamo che $h|n_2$, allora la proposizione è dimostrata. Osserviamo che

$n_1 \cdot n_2 = ac \Rightarrow n_1 \cdot n_2 = shc \Rightarrow \frac{n_1}{s} \cdot \frac{n_2}{h} = c \Rightarrow \frac{k \cdot n_2}{h} = c$.

Da questa ultima relazione sapendo che $M.C.D.(h,k) = 1 \Rightarrow$ per il lemma 2 $h|n_2$ e quindi $\frac{n_2}{h} = t$ e la fattorizzazione del trinomio diventa

$$p(x) = ax^2 + bx + c = s(hx + k)\left(x + \frac{n_2}{sh}\right) = s(hx + k)\left(x + \frac{t}{s}\right) = s(hx + k)\left(\frac{sx + t}{s}\right)$$

$p(x) = ax^2 + bx + c = (hx + k) \cdot (sx + t)$ □

Lemma 3. *Sia assegnato il trinomio* $p(x) = ax^2 + bx + c$. *Se* $\Delta = 0$, *allora* a *e* c *sono quadrati*.

Proof. Per ipotesi sappiamo che $\Delta = 0 \Rightarrow b^2 = 4ac \Rightarrow b^2$ è pari e b è pari. Se $a = 1$ e $c = 1$ la proposizione è vera. Se $a = 1$ si comprende che da $c = \frac{b^2}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ e quindi a e c sono quadrati; allo stesso modo si conclude se $c = 1$. Possiamo supporre $a > 1$ e $b > 1$, essendo b pari $\exists m \in Z^*$ con $b = 2m \Rightarrow 4ac = 4m^2$ e quindi $ac = m^2$. Proviamo che a non è un numero primo, se così fosse $a|ac \Rightarrow a|m^2 \Rightarrow a|m$, allora $m = as$ e quindi $ac = a^2s^2 \Rightarrow c = as^2$, questa conclusione ci dice che $M.C.D.(a,c) = a \neq 1$ in contrasto con il lemma 1. In conclusione possiamo dire che a e c non sono primi e $a,c \geq 4$, allora per il T.F.A abbiamo: $a = p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdots p_r^{h_r}$ e $c = q_1^{k_1} \cdot q_2^{k_2} \cdots q_s^{k_s}$

Poiché $M.C.D.(a,c) = 1$, allora $p_i \neq q_i$. Possiamo scrivere: $p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdots p_r^{h_r} \cdot q_1^{k_1} \cdot q_2^{k_2} \cdots q_s^{k_s} = m^2$

Sappiamo che $p_1^{h_1}$ divide il termine a primo membro, allora $p_1^{h_1} | m^2 \Rightarrow h_1$ è pari e cosi concludiamo per tutti gli esponenti h_i e k_i. In conclusione possiamo scrivere:

$p_1^{2\overline{h_1}} \cdot p_2^{2\overline{h_2}} \cdots p_r^{2\overline{h_r}} \cdot q_1^{2\overline{k_1}} \cdot q_2^{2\overline{k_2}} \cdots q_s^{2\overline{k_s}} = m^2$

$\left(p_1^{\overline{h_1}} \cdot p_2^{\overline{h_2}} \cdots p_r^{\overline{h_r}}\right)^2 \cdot \left(q_1^{\overline{k_1}} \cdot q_2^{\overline{k_2}} \cdots q_s^{\overline{k_s}}\right)^2 = m^2$

Concludiamo che $a = \left(p_1^{\overline{h_1}} \cdot p_2^{\overline{h_2}} \cdots p_r^{\overline{h_r}}\right)^2$ e $c = \left(q_1^{\overline{k_1}} \cdot q_2^{\overline{k_2}} \cdots q_s^{\overline{k_s}}\right)^2$ sono quadrati. □

Proposizione 2. *Sia assegnato il trinomio* $p(x) = ax^2 + bx + c$. *Se* $\Delta = 0$, *allora* $p(x) = ax^2 + bx + c = (\sqrt{a}x \pm \sqrt{c})^2$.

Proof. Essendo $\Delta = 0$, allora $n_1 = n_2 = n = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 2n$ e $ac = n^2$, per il lemma 3 possiamo dire che a e c sono quadrati e quindi $n = \pm\sqrt{a}\sqrt{c}$ e $b = \pm 2\sqrt{a}\sqrt{c}$, dunque $p(x) = ax^2 + bx + c = (\sqrt{a}x \pm \sqrt{c})^2$ □

Proposizione 3. *Il trinomio* $p(x) = ax^2 + bx + c$ *è riconducibile ad un quadrato di binomio se e solo se* $\Delta = 0$

Proof. $(\Rightarrow)$ Supponiamo che il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ sia riconducibile al quadrato di binomio $(px + q)^2$ con $p,q \in Z^*$. Intanto deve essere evidente che $p = \pm\sqrt{a}$, $q = \pm\sqrt{c}$ e $b = \pm 2\sqrt{a}\sqrt{c}$, allora $b^2 = 4ac \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$ e quindi $\Delta = 0$. $(\Leftarrow)$Consideriamo il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$, se $\Delta = 0$ allora per la proposizione2 possiamo scrivere $p(x) = ax^2 + bx + c = (\sqrt{a}x \pm \sqrt{c})^2$ □