Superficie di un poligono regolare P_n

Istituto "ASSTEAS"-Buccino-
F. Fernicola 18 Novembre 2023

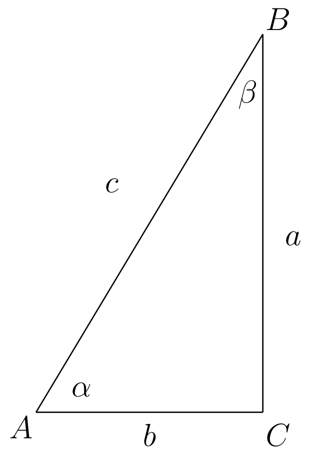
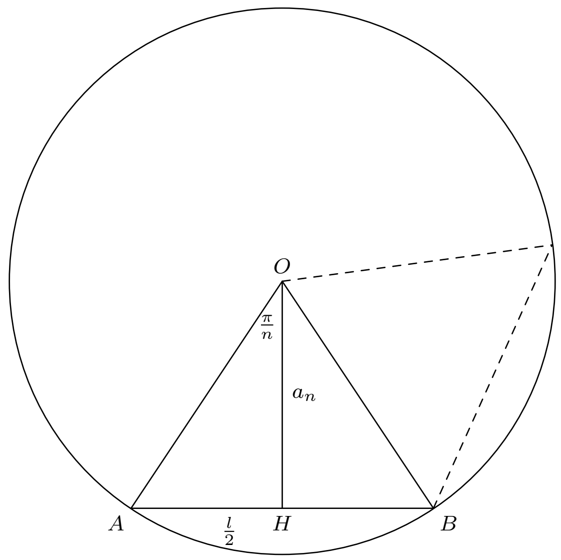


Figura 1: Triangolo rettangolo

A lezione abbiamo provato che valgono le seguenti relazioni: $\frac{a}{b} = \tan(\alpha)$ e $\frac{b}{a} = \tan(\beta)$. Queste relazioni sono interessanti perchè ci permetteranno di dedurre la superficie di un *Poligono Regolare di n lati*.



Osserviamo che il triangolo $\overset{\triangle}{AOB}$ è uno degli n triangoli che formano il poligono P_n di n lati. Osserviamo che l'angolo $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{n}$ e di conseguenza l'angolo $\widehat{AOH} = \frac{\pi}{n}$, osserviamo anche che $\overline{AB} = l$, mentre a_n è *l'apotema* del poligono regolare P_n.

Definizione 1. *Ricordiamo che in un poligono regolare P_n di n lati con il termine* Apotema *si indica la distanza tra il centro della circonferenza circoscritta al poligono e il lato del poligono. Possiamo in modo equivalente dire che* l'Apotema *indica il raggio della circonferenza inscritta nel poligono.*

L'area del triangolo $A\overset{\triangle}{O}B$ vale $A_{T_n} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot a_n$ e di conseguenza $A_{P_n} = n \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot a_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot l \cdot a_n = \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot a_n = p \cdot a_n$ e quindi in forma compatta possiamo dire che:

$$A_{P_n} = p \cdot a_n$$

Per determinare l'area di un poligono regolare bisogna moltiplicare il *semiperimetro per l'apotema.*

Per le relazioni sui triangoli rettangoli messe in evidenza poco prima possiamo dire che $\frac{\frac{l}{2}}{a_n} = tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \Longrightarrow \frac{l}{a_n} = 2 \cdot tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \Longrightarrow a_n = \frac{l}{2 \cdot tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$

$$A_{P_n} = \frac{p \cdot l}{2 \cdot tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{2p \cdot l}{4 \cdot tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{n \cdot l \cdot l}{4 \cdot tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

In definitiva possiamo dire che

$$A_{P_n} = \frac{n \cdot l^2}{4 \cdot tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Vediamo che la formula funziona nel caso a noi più familiare, ovvero $n = 4$ e quindi l'area del quadrato di lato l.

$A_{P_4} = \frac{4 \cdot l^2}{4 \cdot tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{4 \cdot l^2}{4 \cdot 1} = l^2$, in forma compatta:

$$A_{P_4} = l^2$$