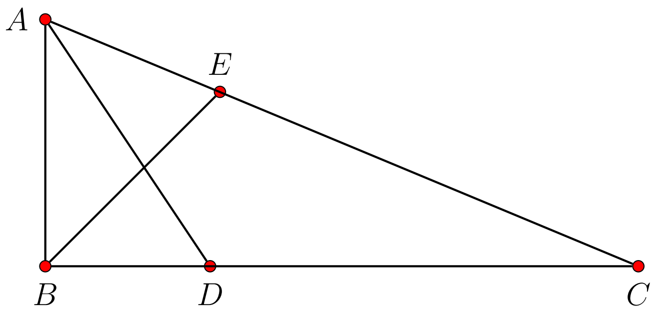
Problema FLATlandia Febbraio 2024

Soluzione n.3 (Trigonometrica)

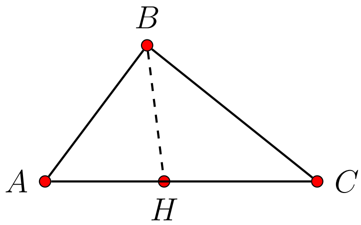


Dati: $\overset{\triangle}{ABC}$ triangolo rettangolo, AD bisettrice di $\widehat{A}$, BE bisettrice di $\widehat{B}$, $\overline{AE} = 5$ e $\overline{EC} = 12$.

Nel problema posto si chiede di determinare quanto vale $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$ e noi dimostreremo che $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{3}{2}$.

Dimostrazione. Il risultato che vogliamo provare si basa sul seguente:

Lemma 1. *Supponiamo di avere un triangolo $\overset{\triangle}{ABC}$ e supponiamo che BH sia la bisettrice dell'angolo in $\widehat{B}$*



In una tale situazione vale la seguente proporzione: $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AH} : \overline{HC}$

Indichiamo per comodità con $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ e con $\overline{BD} = c$, per il **Lemma** precedente applicato alla bisettrice BE possiamo scrivere la seguente relazione: $a : b = 5 : 12$.

La relazione precedente si può scrivere come $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{12}$, dunque se indichiamo con $\widehat{C} = \alpha$, allora $\tan\alpha = \dfrac{5}{12}$. Osserviamo che con semplici conteggi si ha che l'angolo $A\widehat{D}B = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}$ e possiamo concludere che $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{1 + \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$. Non resta che calcolare $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$. Dalle formule parametriche sappiamo che $\tan(\alpha) = \dfrac{2t}{1-t^2} = \dfrac{5}{12}$ dove $t = \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$. Da semplici calcoli dalla relazione $\dfrac{2t}{1-t^2} = \dfrac{5}{12}$ si trova che $t = \dfrac{1}{5}$ e quindi possiamo concludere che $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{1 + \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{1 + \dfrac{1}{5}}{1 - \dfrac{1}{5}} = \dfrac{\dfrac{6}{5}}{\dfrac{4}{5}} = \dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{5}{4} = \dfrac{3}{2}$. Quello che volevamo provare è stato ottenuto in quanto abbiamo provato che $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{3}{2}$

□