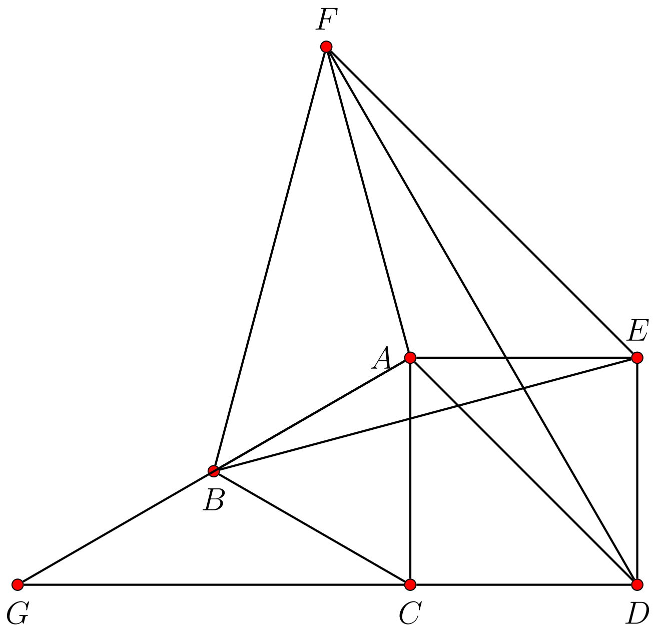
Problema FLATlandia 23 Ottobre 2023

Soluzione n.3



Hp: $\overset{\triangle}{ABC}$ e $\overset{\triangle}{BEF}$ sono triangoli equilateri, $CDEA$ è un quadrato **Th:** $\widehat{CDF} = 60°$

Dimostrazione. Vogliamo utilizzare un approccio geometrico sintetico che sfrutta la similitudine tra triangoli per dare una risposta al problema. Per comodità prendiamo il lato del quadrato $ACDE$ pari a $l = 1$. Ora facciamo le seguenti osservazioni:

- L'angolo $\widehat{BEF} = 60°$ perché $\overset{\triangle}{BEF}$ è equilatero per costruzione
- L'angolo $\widehat{BAE} = 150° = \widehat{EAC} + \widehat{CAB} = 90° + 60°$
- Il triangolo $\overset{\triangle}{BAE}$ è isoscele perché $AE \cong AB$ per costruzione
- L'angolo $\widehat{AEB} = 15°$ perché gli angoli alla base di un triangolo isoscele

Dai punti precedenti si deduce che l'angolo $\widehat{AEF} = 45°$. Ora la bisettrice $\widehat{BFE}$ passa per A (*in un triangolo equilatero e l'asse coincide con mediana bisettrice e altezza*), poiché l'angolo $\widehat{FAE} = 105°$ sarà l'angolo $\widehat{FAD} = 150°$. Se noi dimostriamo che $\overline{AF} \cong \overline{AD} = \sqrt{2}$ il triangolo $\overset{\triangle}{FAD}$ è isoscele, essendo l'angolo $\widehat{FAD} = 150°$, possiamo concludere che l'angolo $\widehat{ADF} = 15°$ e da $\widehat{CDA} = 45°$ si ha la tesi. I segmenti AB e CD prolungati si intersecano nel punto G. Osserviamo che essendo $\widehat{GAD} = 105°$ e $\widehat{ADC} = 45°$, allora sarà l'angolo $\widehat{BGC} = 30°$ e poiché anche $\widehat{BCG} = 30°$, allora il triangolo $\overset{\triangle}{GBC}$ e è isoscele e per transitività $AB \cong BG$. Osserviamo che i triangoli $\overset{\triangle}{GAD}$ e $\overset{\triangle}{EAF}$ sono simili in quanto $\widehat{GAD} \cong \widehat{FAE} = 105°$, $\widehat{AGD} \cong \widehat{AFE} = 30°$ e $\widehat{ADG} \cong \widehat{AEF} = 45°$, dunque è possibile scrivere la seguente proporzione:

$$\overline{AG} : \overline{AF} = \overline{AD} : \overline{AE}$$

$$2 : \overline{AF} = \sqrt{2} : 1 \Longrightarrow \overline{AF} = \sqrt{2}$$

□