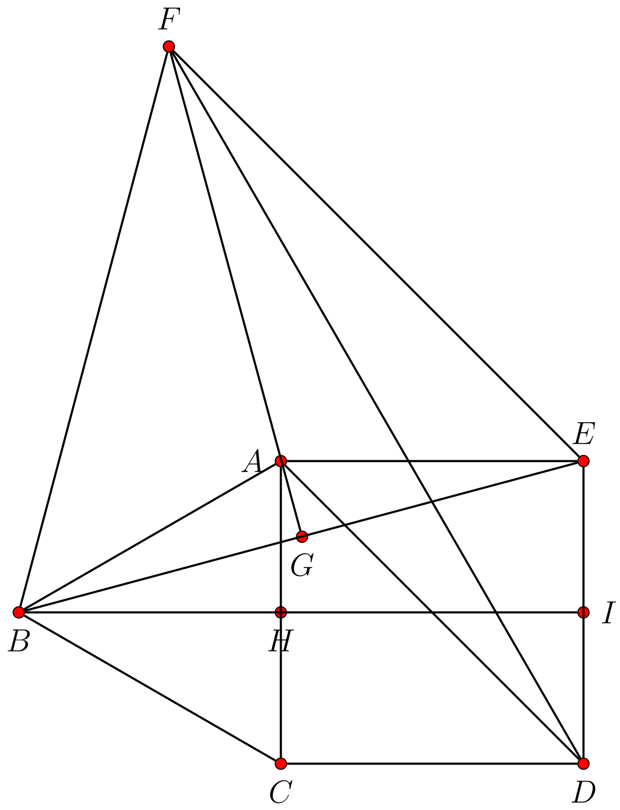
# Problema FLATlandia 23 Ottobre 2023

Soluzione n.2




**Hp:** $\overset{\triangle}{ABC}$ e $\overset{\triangle}{BEF}$ sono triangoli equilateri, $ABCD$ è un quadrato **Th:** $\widehat{CDF} = 60°$

*Dimostrazione.* Vogliamo utilizzare un approccio geometrico non sintetico per dare una risposta al problema. Per comodità prendiamo il lato del quadrato $ACDE$ pari a $l = 1$. Ora facciamo le seguenti osservazioni:

- L'angolo $\widehat{BEF} = 60°$ perché $\overset{\triangle}{BEF}$ è equilatero per costruzione
- L'angolo $\widehat{BAE} = 150° = \widehat{EAC} + \widehat{CAB} = 90° + 60°$
- Il triangolo $\overset{\triangle}{BAE}$ è isoscele perché $AE \cong AB$ per costruzione
- L'angolo $\widehat{AEB} = 15°$ perché gli angoli alla base di un triangolo isoscele

Dai punti precedenti si deduce che l'angolo $\widehat{AEF} = 45°$. Ora la bisettrice dell'angolo $\widehat{BFE}$ passa per $A$ (*in un triangolo equilatero e l'asse coincide con mediana bisettrice e altezza*), poichè l'angolo $\widehat{FAE} = 105°$ sarà l'angolo $\widehat{FAD} = 150°$. Se noi dimostriamo che $\overline{AF} \cong \overline{AD} = \sqrt{2}$ il triangolo $\overset{\triangle}{FAD}$ è isoscele, essendo l'angolo $\widehat{FAD} = 150°$, possiamo concludere che l'angolo $\widehat{ADF} = 15°$ e da $\widehat{CDA} = 45°$ si ha la tesi.

Intanto affermiamo immediatamente che $\overline{BH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Calcoliamo la lunghezza del segmento $\overline{BE}$ (lato del "triangolo equilatero grande"):

$$\overline{BE} = \sqrt{\overline{EI}^2 + \overline{IB}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Il lato del "triangolo equilatero grande" vale $\overline{BE} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, il segmento $\overline{GE} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$ e l'altezza $\overline{FG} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Calcoliamo ora $\overline{AG} = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{GE}^2} = \sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Non resta che calcolare $\overline{AF} = \overline{FG} - \overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Ricordando le formule dei radicali doppi: $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\overline{AF} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{3}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

In forma compatta $\overline{AF} = \sqrt{2}$ e quindi la tesi.

$\square$