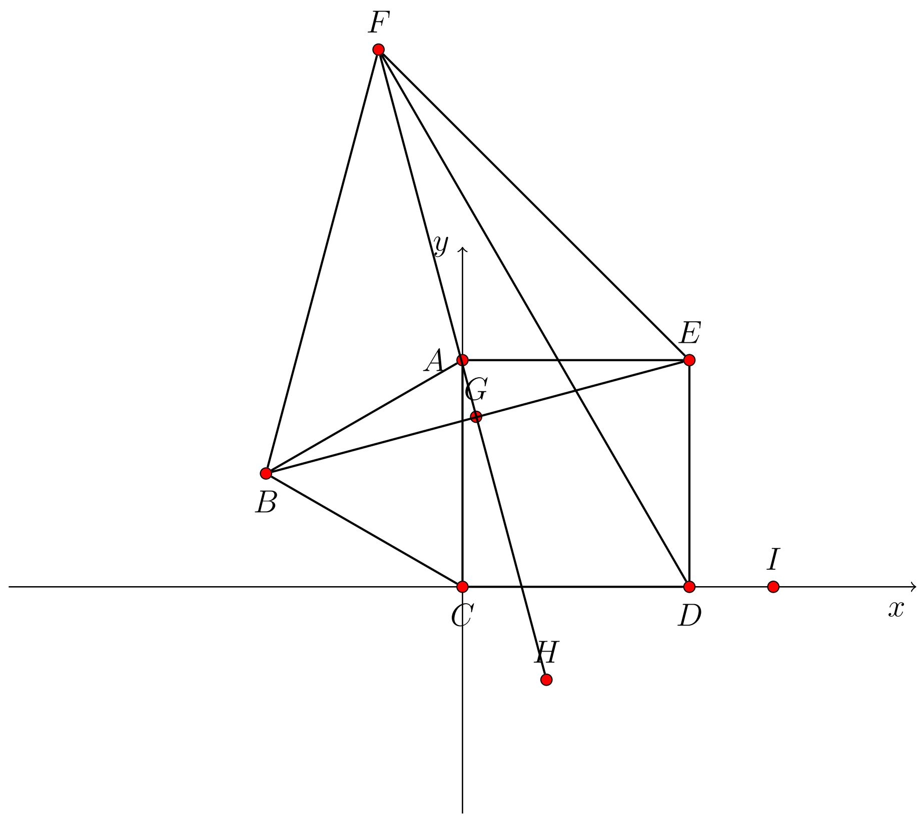
# Problema FlatLANDIA 23 Ottobre 2023

Soluzione n.1




**Hp:** $\overset{\triangle}{ABC}$ e $\overset{\triangle}{BEF}$ sono triangoli equilateri, $CDEA$ è un quadrato **Th:** $\widehat{CDF} = 60°$

*Dimostrazione.* Vogliamo utilizzare un approccio analitico per dare una risposta al problema geometrico. Fissiamo un sistema monometrico ortogonale cartesiano con asse delle ascisse lungo $CD$ e l'asse delle ordinate lungo $CA$ con l'origine in $C \equiv (0,0)$. Per comodità prendiamo il lato del quadrato $ACDE$ pari a $l = 1$. In tal caso $D \equiv (1,0)$, $E \equiv (1,1)$, $A \equiv (0,1)$. Osserviamo che $d(A,B) = 1$, allora l'altezza del triangolo $\overset{\triangle}{ABC}$ vale $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e quindi possiamo dire che $B \equiv \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. La retta passante per $B$ e $E$ ha coefficiente angolare $m_{BE} = \dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}} =$

$= \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$, quindi in forma compatta possiamo scrivere $m_{BE} = 2-\sqrt{3}$.

Osserviamo che l'asse del segmento $BE$ passa per $A$ e per il vertice $F$ (l'asse "coincide" con mediana bisettrice e altezza del triangolo equilatero). Ora facciamo le seguenti osservazioni:

- L'angolo $\widehat{BEF} = 60°$ perché $\overset{\triangle}{BEF}$ è equilatero per costruzione
- L'angolo $\widehat{BAE} = 150° = \widehat{EAC} + \widehat{CAB} = 90° + 60°$
- Il triangolo $\overset{\triangle}{BAE}$ è isoscele perché $AE \cong AB$ per costruzione

- L'angolo $\widehat{AEB} = 15°$ perché gli angoli alla base di un triangolo isoscele

  Dai punti precedenti si deduce che l'angolo $\widehat{AEF} = 45°$.

Il nostro intento è determinare le coordinate del punto $F$, non ci sono dubbi che esso si può determinare come punto di intersezione tra la retta $r$ passante per $E$ di coefficiente angolare $m = -1 = tan(135°)$ e l'asse del segmento $BE$.

**1)** La retta $r$ che passa per $E$ ha equazione $r : y - 1 = -1(x - 1)$ ovvero $r : y = -x + 2$

**2)** L'asse del segmento $BE$ passa per $A \equiv (0, 1)$ e ha coefficiente angolare antireciproco di $m_{BE} = 2 - \sqrt{3}$ ovvero $\overline{m} = -\dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = -(2+\sqrt{3})$, in forma compatta $\overline{m} = -(2+\sqrt{3})$. L'asse $n$ ha equazione $n : y - 1 = -(2 + \sqrt{3})x$ ovvero $n : y = -(2 + \sqrt{3})x + 1$.

Per determinare le coordinate di $F$ è sufficiente risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -(2 + \sqrt{3})x + 1 \end{cases}$$

Con semplici passaggi si trova $F \equiv \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$, non resta altro che determinare il coefficiente angolare della retta che passa per $F$ e $D \equiv (1, 0)$ e quindi $m_{FD} = \dfrac{\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}}{-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}} =$

$= -\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = -\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \cdot \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = -\dfrac{3\sqrt{3}-3+3-\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$ e quindi in forma compatta $m_{FD} = -\sqrt{3}$.

Concludiamo che l'angolo $\widehat{IDF} = \alpha$ è tale che $tan(\alpha) = -\sqrt{3} \Longrightarrow \alpha = 120°$, deduciamo che l'angolo ad esso adiacente $\widehat{CDF} = 60°$.

$\square$