Sistemi lineari e matrici quadrate di ordine tre

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola

14 Marzo 2024

Non preoccuparti delle difficoltà che incontri in matematica, ti posso assicurare che le mie sono ancora più grosse (Albert Einstein).

Definizione 1 *Si dice* matrice quadrata di ordine 3 *una tabella del seguente tipo:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Più precisamente parleremo di *matrice quadrata reale di ordine* 3 per dire che gli elementi $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Ricordiamo che i è l'indice di riga e j è l'indice di colonna. Infatti, l'elemento a_{ij} si trova sulla $i-esima$ riga e $j-esima$ colonna.

Gli elementi $\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}$ si dicono elementi della *DIAGONALE PRINCIPALE* della matrice.

Gli elementi $\begin{pmatrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{pmatrix}$ si dicono elementi della *DIAGONALE SECONDARIA* della matrice.

Sia assegnata la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, ad essa si può associare un numero che si chiama *Determinate* di A e si indica con $|A|$, $det(A)$ oppure con $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Il determinante di una matrice di ordine 3 si può calcolare con la seguente *REGOLA di SARRUS*:

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

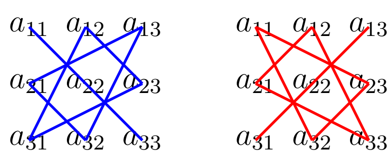

Figura 1: Regola di Sarrus

Esercizio 1 *Utilizzando la regola di SARRUS, calcolare i determinanti delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Osservazione 1 *A voler essere precisi la prossima proposizione è una versione semplificata del teorema di Cramer e noi prenderemo in considerazione solo il caso $det(A) \neq 0$ e lo faremo per i limiti di conoscenza che giustamente si possono avere a livello di scuola superiore.*

Proposizione 2 *(**Teorema di Cramer**) Sia assegnato il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Si consideri la matrici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *dei coefficienti. Se $det(A) \neq 0$, allora il sistema lineare ammette un'unica soluzione ed essa può essere calcolata utilizzando la* Regola di Cramer*:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{det(A)} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{det(A)} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{det(A)}$$

Se $det(A) = 0$, allora il sistema lineare o è impossibile o sarà indeterminato.

Per il momenti ci limitiamo ad applicare il *Teorema di Cramer* quando $det(A) \neq 0$. Vediamo il seguente esempio:

Esempio 1 *Risolvere il seguente sistema lineare utilizzando la regola di Cramer:* $\begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ 2x + y = 0 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$

Svolgimento

Considero la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calcoliamo immediatamente $det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 8 - 2 + 2 = 6 \neq 0$, poiché il determinante della matrice dei coefficienti è non nullo è possibile applicare *il Teorema di Cramer* e immediatamente andiamo a calcolare gli altri tre determinanti:

$$det(A_1) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

$$det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$$

$$det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 + 1 - 2 = -3$$

Scriviamo la soluzione: $x = \dfrac{det(A_1)}{det(A)} = \dfrac{-1}{6}$, $y = \dfrac{det(A_2)}{det(A)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$, $z = \dfrac{det(A_3)}{det(A)} = \dfrac{-3}{6} = -\dfrac{1}{2}$

In definitiva il sistema assegnato ammette la soluzione $S = \left\{ \left(-\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2} \right) \right\}$.