Nota su una parabola generica

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola

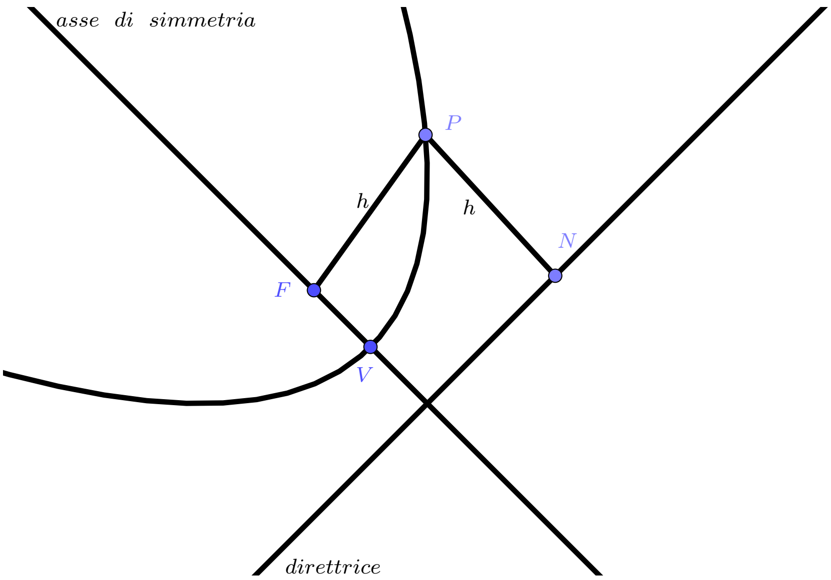
24 Febbraio 2024

1 Osservazioni preliminari

Osservazione 1 *Si dice che la Geometria classica studia le proprietà delle figure. Tra queste figure, dove per figura intendiamo un qualsiasi insieme di punti del piano euclideo, rivestono un ruolo importante le coniche; mi riferisco alle coniche classiche: parabola, iperbole ed ellisse (la circonferenza è una particolare ellisse). Con gli studi di Cartesio e con l'avvento del metodo delle coordinate si crea un "matrimonio" tra gli strumenti dell'Algebra (prodotto cartesiano tra insiemi, equazioni, sistemi di equazioni....) e la Geometria Piana (punti, rette, figure del piano,....).*

2 La parabola

Per definire una *parabola* nel piano della geometria euclidea bisogna fissare una retta d arbitraria e un punto F che non appartiene a d. La retta d si dice *direttrice* e il punto F si chiama *fuoco*. La *parabola* è il luogo geometrico dei punti P del piano che sono equidistanti dal fuoco F e dalla direttrice d. In simboli $D(P,F) = D(P,d)$, solitamente la distanza si indica con d e in questo caso per non avere il simbolo $d(P,d)$ abbiamo preferito utilizzare D al posto di d.



La retta che passa per il fuoco ortogonale all direttrice si dice *asse di simmetria* della parabola.

Se si introduce un sistema di riferimento nel piano si può lavorare avvalendosi degli strumenti dell'algebra, allora vediamo come esce fuori l'equazione che descrive una parabola. Abbiamo detto che per descrivere una parabola abbiamo bisogno di una retta, direttrice, e quindi di un'equazione del tipo $d : ax+by+c = 0$ e di un punto F fuoco che avrà coordinate $F \equiv (x_0, y_0)$. Non resta che impostare la relazione che ci permette di "selezionare" i punti $P \equiv (x, y)$ del piano che soddisfano la condizione:

$$D(P,F) = D(P,d)$$

Ora $D(P,F) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ e $D(P,d) = \dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Dunque viene fuori l'uguaglianza:

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Elevando i due membri al quadrato e sviluppando tutti i calcoli viene fuori l'equazione in due variabili:

(P)

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2abxy - 2(a^2x_0 + b^2x_0 + ac)x - 2(a^2y_0 + b^2y_0 + bc)y + (a^2+b^2)(x_0^2 + y_0^2) - c^2 = 0$$

Facendo le dovute posizioni essa assume la forma:

$$mx^2 + ny^2 + pxy + qx + ry + s = 0$$

Quella in alto è l'equazione della parabola con direttrice $d : ax + by + c = 0$ e fuoco $F \equiv (x_0, y_0)$. Come si osserva è un'equazione di secondo grado nelle variabili x, y. L'equazione non deve spaventare perchè a, b, c, x_0, y_0 sono quantità note perchè assegnate.

Esempio 1 *Scrivere l'equazione della parabola che ha direttrice la retta $d : x + y + 2 = 0$ e fuoco $F \equiv (1, 2)$. Per sviluppare l'esercizio e scrivere l'equazione della parabola si scrive:*

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \frac{|x+y+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{(x+y+2)^2}{2}$$

$$2(x-1)^2 + 2(y-2)^2 = x^2 + y^2 + 4 + 2xy + 4x + 4y$$

$$2x^2 - 4x + 2 + 2y^2 - 8y + 8 = x^2 + y^2 + 4 + 2xy + 4x + 4y$$

$$x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 12y + 6 = 0$$

Esercizio di allenamento:

Esercizio 1 *Scrivere l'equazione della parabola che ha direttrice la retta $d : x - 2y + 1 = 0$ e fuoco $F \equiv (4, 0)$.*