Incentro di un triangolo

Liceo Assteas -Buccino-
F. Fernicola 17 Ottobre 2023

Incentro di un triangolo

Presi in un piano cartesiano tre punti non allineati A, B e C (Punti che non si trovano su una stessa retta), sappiamo che essi individuano un triangolo. Si chiama *Incentro del triangolo* il punto di incontro delle tre bisettrici. Ci chiediamo, se noi conosciamo le coordinate dei tre vertici $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ e $C \equiv (x_3, y_3)$ possiamo conoscere le coordinate dell'incentro I del triangolo? La risposta è affermativa e in nostro aiuto viene una formula che scriveremo dopo aver fatto alcune precisazioni.

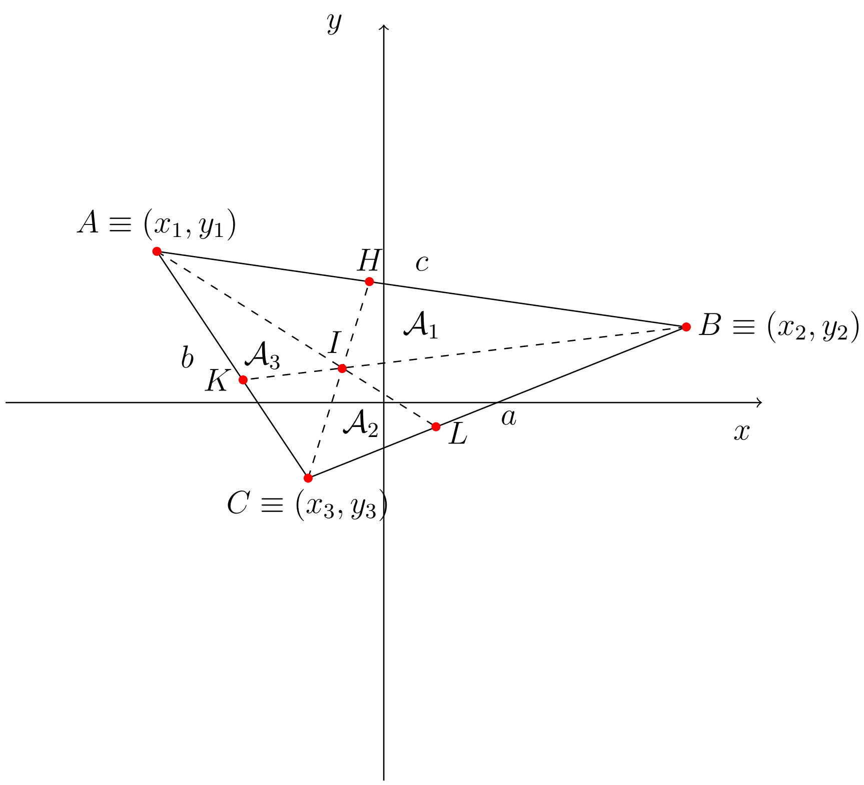

Figura 1: Incentro I del triangolo

Intanto bisogna subito dire che l'incentro, le cui coordinate le indicheremo con $I \equiv (x_I, y_I)$, è il punto non solo punto di incontro delle tre bisettrici ma anche il punto equidistante dai lati del triangolo ed è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo. Dunque i tre triangoli che individua l'incentro sono $A\overset{\triangle}{I}B$, $B\overset{\triangle}{I}C$ e $C\overset{\triangle}{I}A$ ed essi hanno la medesima altezza che noi indichiamo con r. E' abitudine, soprattutto quando si studia la trigonometria, indicare con a la lunghezza del lato opposto al vertice A, di conseguenza con b la lunghezza del lato opposto al vertice B e con c la lunghezza del lato opposto al vertice C. Non ci sono dubbi che se noi indichiamo con $\mathcal{A}$ l'area del triangolo $A\overset{\triangle}{B}C$ e con $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$ rispettivamente le aree dei triangoli $A\overset{\triangle}{I}B$, $B\overset{\triangle}{I}C$ e $C\overset{\triangle}{I}A$. Risulta evidente che:

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}$$

$$\frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r = \mathcal{A}$$

$$\frac{1}{2}r \cdot (c + a + b) = \mathcal{A}$$

Ricordiamo che $a + b + c = 2p$ (perimetro del triangolo e con p si indica il semiperimetro!!)

$$\frac{1}{2}r \cdot (2p) = \mathcal{A}$$

$$r \cdot p = \mathcal{A}$$

E finalmente

$$r = \frac{\mathcal{A}}{p}$$

Dunque se conoscete l'area di un triangolo e il perimetro potete calcolare il raggio r della circonferenza inscritta nel triangolo. Voglio riportare un'altra formula interessante che ci permette di calcolare l'area di un triangolo se conosciamo soltanto il perimetro $2p$ del triangolo stesso. La formula è la seguente ed è nota come **Formula di Erone**:

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

Ora se mettiamo le due relazioni trovate possiamo dire che $r = \dfrac{\sqrt{p(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}}{p}$ e quindi

$$r = \sqrt{\frac{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}{p}}$$

L'ultima formula permette di calcolare il raggio r solo conoscendo la lunghezza dei tre lati. Ora però veniamo alla formula che permette di determinare le coordinate dell'incentro di un triangolo note le coordinate dei tre lati.

$$I \equiv \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{2p}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{2p} \right)$$

Osservazione 1 *La formula precedente non è difficile da dedurre ed è prematuro per voi una giustificazione da dove viene fuori. Osservate che la relazione precedente ci agevola altrimenti per determinare l'incentro I avremmo dovuto determinare due bisettrici di angoli interni e intersecare tra di loro queste due bisettrici. Ne bastavano due perché anche la terza bisettrice passa come sapete per l'incentro.*

Esercizio 1 *Sia assegnata la retta di equazione $4x + 3y - 12 = 0$ e si indicano con A e B i punti che tale retta interseca gli assi cartesiani. Determinare le coordinate del baricentro e il raggio r della circonferenza inscritta nel triangolo $\overset{\triangle}{AOB}$.*