Fascio di rette *Proprio* e *Improprio*

Liceo Wiligelmo -Modena-

30 Settembre 2023

FASCIO PROPRIO DI RETTE

Sia assegnato un punto del piano cartesiano $P \equiv (x_0, y_0)$, la seguente equazione:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

al variare di $m \in \mathbb{R}$ rappresenta una retta che passa per il punto $P \equiv (x_0, y_0)$. Per essere più precisi essa descrive tutte le rette, eccetto la *retta verticale* $x - x_0 = 0$, osserviamo che la retta orizzontale per $P \equiv (x_0, y_0)$ si ottiene per $m = 0$ e si ha $y - y_0 = 0$ o se volete $y = y_0$ che riconoscete essere una retta orizzontale. La relazione $y - y_0 = m(x - x_0)$ si dice anche *FASCIO PROPRIO* di rette con centro $P \equiv (x_0, y_0)$.

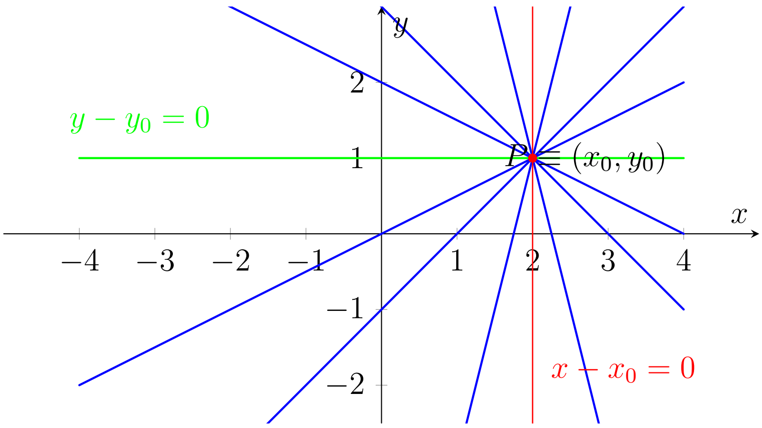

Figura 1: FASCIO PROPRIO di rette per $P \equiv (x_0, y_0)$

E' utile conoscere l'equazione del *FASCIO PROPRIO* di rette? La risposta è ovviamente affermativa! Vediamo come la possiamo utilizzare!!

<u>Utilizzo per retta parallela</u>

Esempio 1 *Scrivere l'equazione della retta passante per* $P \equiv (-3, 2)$ *e parallela alla retta* $r : 4x - y + 2 = 0$

Svolgimento Facendo un piccolo ragionamento sappiamo che l'equazione della retta s da determinare deve avere lo stesso coefficiente angolare della retta r. Sappiamo che il coefficiente angolare della retta r è $m_r = 4$, a questo punto chiamiamo a rapporto l'equazione del fascio proprio...

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

La retta s la determiniamo mettendo al posto di x_0 l'ascissa del punto, al posto di y_0 l'ordinata del punto e $m = 4$ (ricordate che rette parallele hanno stesso coefficiente angolare!!).

La retta s sarà: $y - 2 = 4(x + 3) \Longrightarrow y - 2 = 4x + 12 \Longrightarrow 4x - y + 14 = 0$. In forma compatta possiamo dire:

$$s : 4x - y + 14 = 0$$

Un semplice controllo ci dice che la retta è quella giusta (il suo coefficiente angolare è 4 ed è un gioco controllare che $P \equiv (-3, 2)$ appartiene ad s!!

<u>Utilizzo per retta ortogonale</u>

Esempio 2 *Scrivere l'equazione della retta passante per* $P \equiv (2, -3)$ *e ortogonale alla retta* $r : 2x - 3y + 2 = 0$

Svolgimento Facendo un piccolo ragionamento sappiamo che l'equazione della retta s da determinare deve avere coefficiente angolare antireciproco della retta r. Sappiamo che il coefficiente angolare della retta r è $m_r = \frac{2}{3}$ e quindi $m_s = -\frac{3}{2}$. Possiamo chiamare a rapporto l'equazione del fascio proprio...

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

La retta s la determiniamo mettendo al posto di x_0 l'ascissa del punto, al posto di y_0 l'ordinata del punto e $m = -\frac{3}{2}$ (ricordate che rette perpendicolari hanno coefficiente angolare antireciproci!!).

La retta s sarà: $y + 3 = -\frac{3}{2}(x - 2) \Longrightarrow 2y + 6 = -3x + 6 \Longrightarrow 3x + 2y = 0$. In forma compatta possiamo dire:

$$s : 3x + 2y = 0$$

Un semplice controllo ci dice che la retta è quella giusta (il suo coefficiente angolare è $-\frac{3}{2}$ ed è un gioco controllare che $P \equiv (2, -3)$ appartiene ad s!!

FASCIO IMPROPRIO DI RETTE

Siano a e b numeri fissati, assegnata la seguente equazione:

$$r_k : ax + by + k = 0$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$ fornisce tutte rette parallele tra di loro in quanto il coefficiente angolare sarà sempre $m = -\frac{a}{b}$. L'equazione precedente si dice anche *FASCIO IMPROPRIO* di rette.

E' utile conoscere l'equazione del *FASCIO IMPROPRIO* di rette? La risposta è ovviamente affermativa! Vediamo come la possiamo utilizzare!!

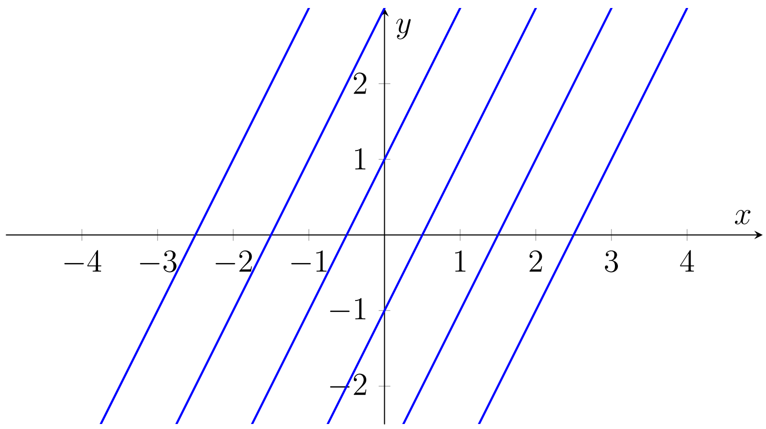

Figura 2: FASCIO IMPROPRIO di rette

Utilizzo per retta parallela

Esempio 3 *Scrivere l'equazione della retta passante per* $P \equiv (-3, 2)$ *e parallela alla retta* $r : 4x - y + 2 = 0$

Svolgimento Facendo un piccolo ragionamento sappiamo che l'equazione della retta s da determinare deve avere lo stesso coefficiente angolare della retta r. Dunque la retta s deve avere un'equazione del tipo:

$$4x - y + k = 0$$

Il valore k di s lo determiniamo mettendo al posto di x_0 l'ascissa del punto, al posto di y_0 l'ordinata del punto

La retta s sarà: $4 \cdot (-3) - 2 + k = 0 \Longrightarrow k = 14$. In forma compatta possiamo dire:

$$s : 4x - y + 14 = 0$$

Un semplice controllo ci dice che la retta è quella giusta (il suo coefficiente angolare è 4 ed è un gioco controllare che $P \equiv (-3, 2)$ appartiene ad s!!

Utilizzo per retta ortogonale

Esempio 4 *Scrivere l'equazione della retta passante per* $P \equiv (2, -3)$ *e ortogonale alla retta* $r : 2x - 3y + 2 = 0$

Svolgimento Facendo un piccolo ragionamento sappiamo che l'equazione della retta s da determinare deve avere coefficiente angolare antireciproco della retta r. Dunque la retta s deve avere un'equazione del tipo:

$$-3x - 2y + k = 0$$

Il valore k di s lo determiniamo mettendo al posto di x_0 l'ascissa del punto, al posto di y_0 l'ordinata del punto

La retta s sarà: $-3 \cdot (2) - 2 \cdot (-3) + k = 0 \Longrightarrow k = 0$. In forma compatta possiamo dire:

$$s : 3x + 2y = 0$$

Un semplice controllo ci dice che la retta è quella giusta (il suo coefficiente angolare è $-\frac{3}{2}$ ed è un gioco controllare che $P \equiv (2, -3)$ appartiene ad s!!

Con le formule che ho condiviso sopra riuscite a svolgere gli esercizi con molta serenità. Esiste qualche numero magico?

CONIGLIO DAL CILINDRO!

La seguente equazione:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

rappresenta una generica retta che passa per il punto $P \equiv (x_0, y_0)$ e di coefficiente angolare $m = -\frac{a}{b}$. vediamo come si usa?

<u>Utilizzo per retta parallela</u>

Esempio 5 *Scrivere l'equazione della retta passante per* $P \equiv (-3, 2)$ *e parallela alla retta* $r : 4x - y + 2 = 0$

Svolgimento Prendo il cilindro e tiro fuori $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, poichè le rette devono essere parallele non vario a e b, mi limito solo a sostituire x_0 e y_0, quindi scrivo:

$$4(x + 3) - (y - 2) = 0$$

Svolgendo i calcoli ottengo subito la retta $s : 4x - y + 14 = 0$

<u>Utilizzo per retta ortogonale</u>

Esempio 6 *Scrivere l'equazione della retta passante per* $P \equiv (2, -3)$ *e ortogonale alla retta* $r : 2x - 3y + 2 = 0$

Svolgimento Prendo il cilindro e tiro fuori $a(x-x_0)+b(y-y_0) = 0$ e poichè le rette devono essere ortogonali metto $a = b$ e $b = -a$ e poi sostituisco x_0 e y_0, quindi scrivo:

$$-3(x - 2) - 2(y + 3) = 0$$

Svolgendo i calcoli ottengo subito la retta $s : -3x - 2y = 0$ o se vogliamo $s : 3x + 2y = 0$.

Abbiamo tirato fuori il coniglio dal cilindro!

Esempio 7 *Scrivere l'equazione della retta passante per* $P \equiv (-2, 1)$ *e parallela alla retta* $r : 3x + y - 1 = 0$

Esempio 8 *Scrivere l'equazione della retta passante per* $P \equiv (2, -1)$ *e perpendicolare alla retta* $r : x - 3y + 2 = 0$

Esempio 9 *Scrivere l'equazione della retta passante per* $P \equiv (3, 2)$ *e parallela alla retta* $r : y = 3x - 4$

Esempio 10 *Scrivere l'equazione della retta passante per* $P \equiv (4, -2)$ *e perpendicolare alla retta* $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$