Area di un triangolo

Liceo Assteas -Buccino-
F. Fernicola

23 Febbraio 2024

Siano assegnati tre punti distinti A, B e C, se essi non sono allineati individuano un triangolo. Il nostro obiettivo è fornire una formula che ci permetta di calcolare l'area del triangolo ricorrendo esclusivamente alle coordinate dei tre punti. Indichiamo con $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ e $C \equiv (x_3, y_3)$ le coordinate dei tre vertici.

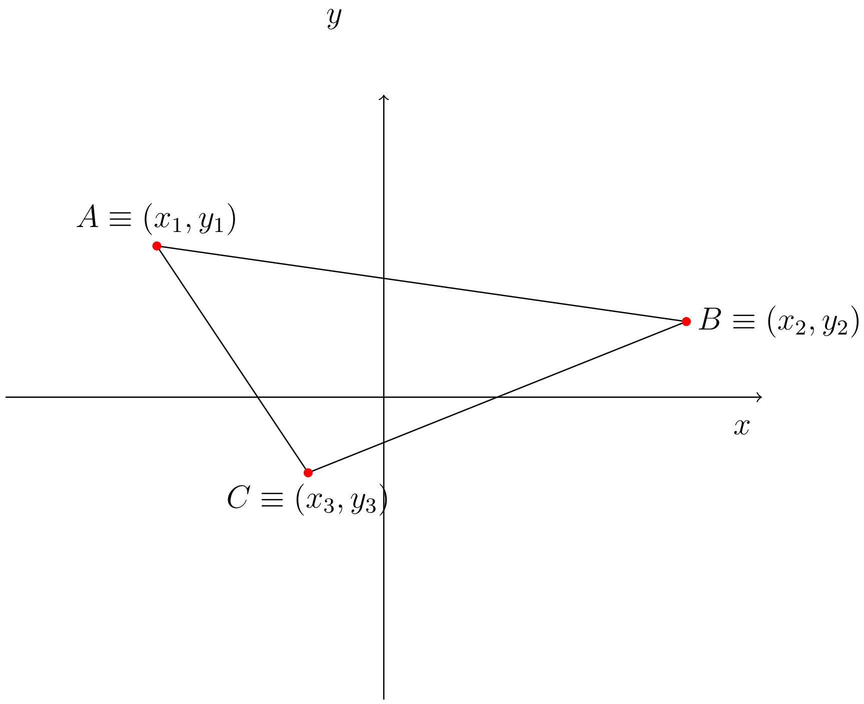

Figura 1: Area di un triangolo

Intanto ci chiediamo come facciamo a sapere se assegnate le coordinate di tre vertici i punti sono o non sono allineati. Dobbiamo controllare il determinate della seguente matrice di ordine 2 (la nozione di determinante utilizzata nella regola di Cramer):

$$|M| = \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}$$

Se $|M| \neq 0 \Longrightarrow$ i tre punti non sono allineati e individuano un triangolo.

Se $|M| = 0 \Longrightarrow$ i tre punti sono allineati e non individuano un triangolo.

Intanto indichiamo con $|D| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. L'area del triangolo sarà: $\mathcal{A} = \left| \frac{1}{2} \cdot |D| \right|$

Esempio 1 *Verificare che i punti $A \equiv (-2,1)$, $B \equiv (3,4)$ e $C \equiv (4,-1)$ non sono allineati e determinare l'area del triangolo da essi individuati.*

Soluzione

$|M| = \begin{vmatrix} 4+2 & -1-1 \\ 3+2 & 4-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 18+10 = 28 \neq 0$, possiamo concludere che i tre punti individuano un triangolo.

$|D| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8+4-3-16-3-2 = -28$, allora possiamo concludere:

$\mathcal{A} = \left|\frac{1}{2} \cdot (-28)\right| = |-14| = 14 \Longrightarrow \mathcal{A} = 14.$

Esempio 2 *Verificare che i punti $A \equiv (4,0)$, $B \equiv (2,3)$ e $C \equiv (0,-2)$ non sono allineati e determinare l'area del triangolo da essi individuati.*

Soluzione

$|M| = \begin{vmatrix} 0-4 & -2-0 \\ 2-4 & 3-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -12-4 = -16 \neq 0$, possiamo concludere che i tre punti individuano un triangolo.

$|D| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 12+0-4-0-0+8 = 16$, allora possiamo concludere:

$\mathcal{A} = \left|\frac{1}{2} \cdot (16)\right| = |8| = 8 \Longrightarrow \mathcal{A} = 8.$

Esercizio 1 *Verificare che i punti $A \equiv (-3,2)$, $B \equiv (-1,4)$ e $C \equiv (2,3)$ non sono allineati e determinare l'area del triangolo da essi individuati.*

Osservazione 1 *Voglio fare vedere come l'esercizio svolto nell'**Esempio 1** può essere svolto anche in modo "tradizionale". Non è difficile trovare la retta per AB, essa ha equazione $r: 3x-5y+11=0$, sappiamo anche che $d(A,B) = \sqrt{34}$.*

Non è difficile calcolare $d(C,r) = \dfrac{|12+5+11|}{\sqrt{34}} = \dfrac{28}{\sqrt{34}} \Longrightarrow \mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{34} \cdot \dfrac{28}{\sqrt{34}} = 14$, come si vede lo stesso risultato.