Esercizio svolto sistema lineare parametrico

Liceo Assteas -Buccino-
F. Fernicola 15 Marzo 2024

Esercizio 1. *Al variare del parametro* $a \in \mathbb{R}$*, discutere il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} 2ax + (a+1)y = a \\ (a+1)x + (a+1)y = 1 \end{cases}$$

Svolgimento

Considero la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 2a & a+1 \\ a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ e poichè

$det(M_a) = \begin{vmatrix} 2a & a+1 \\ a+1 & a+1 \end{vmatrix} = 2a \cdot (a+1) - (a+1)^2 = 2a^2 + 2a - a^2 - 2a - 1 = a^2 - 1.$

In forma compatta $det(M_a) = a^2 - 1$.

Per il teorema di Cramer se $a^2 - 1 \neq 0 \iff a \neq \pm 1$ il sistema lineare ammette un'unica soluzione.

Determiniamo $det(M_a^x) = \begin{vmatrix} a & a+1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = a \cdot (a+1) - (a+1) = a^2 + a - a - 1 = a^2 - 1$

Determiniamo $det(M_a^y) = \begin{vmatrix} 2a & a \\ a+1 & 1 \end{vmatrix} = 2a \cdot 1 - a(a+1) = 2a - a^2 - a = a - a^2 = -a(a-1)$

La soluzione sarà: $x = \dfrac{det(M_a^x)}{det(M_a)} = \dfrac{a^2-1}{a^2-1} = 1$ e $y = \dfrac{det(M_a^y)}{det(M_a)} = -\dfrac{a(a-1)}{a^2-1} = -\dfrac{a}{a+1}$.

In forma compatta possiamo dire:

Se $a \neq \pm 1 \implies S = \left\{ \left(1, -\dfrac{a}{a+1}\right) \right\}$.

Non resta che discutere i casi particolari:

Se $a = -1$, allora $det(M_{-1}^y) = -2$ e il sistema lineare è impossibile.

Se $a = 1$, allora $det(M_1^x) = det(M_1^y) = 0$ e il sistema lineare è indeterminato. Questo il sistema lineare si limita alla sola equazione $2x + 2y = 1$ e come sapete la soluzione può essere descritta nel seguente modo: $S = \left\{ \left(-y_0 + \dfrac{1}{2}, y_0\right) \text{con } y_0 \in \mathbb{R} \right\}$.

Osservazione 1. *Non dimenticate mai come si determinano le infinite soluzioni di un'equazione in due variabili del tipo:* $3x - 2y + 1 = 0$. *Per esercizio trovatele!!*