Segno del trinomio e disequazioni di secondo grado

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola 20 Novembre 2023

1 Osservazioni preliminari

Un modo più diretto per risolvere una disequazione di secondo grado è quello di prendere in considerazione lo schema del segno del trinomio di secondo grado che viene riportato in molti libri di Algebra, tra questi libri a me piace menzionare il classico testo **Algebra** di Giuseppe Zwirner edito dalla casa CEDAM di Padova. Questi manuali hanno formato diverse generazioni di studenti, credo che dal punto di vista didattico nel passato non abbia avuto molti concorrenti. I punti di seguito elencati (A), (B) e (C) si possono facilmente dimostrare, noi però ne prendiamo il contenuto. Vediamo cosa si afferma nel libro di Zwirner, sia assegnato il trinomio :

$$ax^2 + bx + c$$

- (A) $\Delta > 0 \longrightarrow$ Il trinomio assume lo stesso segno di a per valori esterni all'intervallo che ha per estremi le due radici x_1 e x_2, assume segno contrario ad a per valori interni e si annulla per le due radici x_1 e x_2.

		x_1		x_2	
$a > 0$	$+$		$-$		$+$
$a < 0$	$-$		$+$		$-$

- (B) $\Delta = 0 \longrightarrow$ Il trinomio assume sempre lo stesso segno di a e si annulla per le due radici x_1 e x_2.

		$x_1 = x_2$	
$a > 0$	$+$		$+$
$a < 0$	$-$		$-$

- (C) $\Delta < 0 \longrightarrow$ Il trinomio assume sempre lo stesso segno di a.

$a > 0$	$+$
$a < 0$	$-$

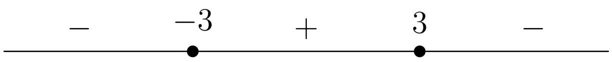
Quello che ho appena detto riflette esattamente quello che si evince nei grafici delle parabole che è stato riportato in un'altra nota scritta per voi. Diciamo che i due schemi sono equivalenti e sono utili per determinare le soluzioni di una disequazione. Vediamo ora come applicando lo schema in alto è possibile scrivere facilmente le soluzioni di una disequazione.

Esempio 1 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$-x^2 + 9 \geq 0$$

Svolgimento

Determiniamo le soluzioni dell'equazione associata $-x^2 + 9 = 0$. L'equazione è pura e ammette due soluzioni distinte che è facile determinare. Dunque $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$, siamo nel caso (A) dello schema precedente e sapendo che $a = -1 < 0$, esce il seguente grafico:



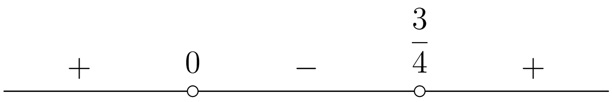
Ora guardando il verso della disequazione assegnata e il relativo grafico del segno si trova la soluzione $S = [-3, 3]$.

Esempio 2 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$4x^2 - 3x > 0$$

Svolgimento

Determiniamo le soluzioni dell'equazione associata $4x^2 - 3x = 0$. L'equazione è spuria e ammette due soluzioni distinte che è facile determinare. Dunque $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{3}{4}$, siamo nel caso (A) dello schema precedente e sapendo che $a = 4 > 0$, esce il seguente grafico:



Ora guardando il verso della disequazione assegnata e il relativo grafico del segno si trova la soluzione $S = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

Esempio 3 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$3x^2 - x + 1 \leq 0$$

Svolgimento

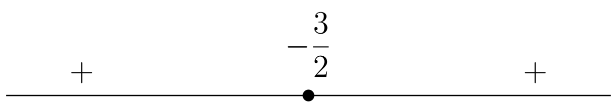
Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata $3x^2 - x + 1 = 0$, in questo caso abbiamo $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(1) = 1 - 12 = -11 < 0$, siamo nel caso (C) dello schema precedente e sapendo che $a = 3 > 0$, esce il seguente grafico:

Ora guardando il verso della disequazione assegnata e il relativo grafico del segno si trova la soluzione $S = \emptyset$.

Esempio 4 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$4x^2 + 12x + 9 \leq 0$$

Svolgimento
Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata $4x^2 + 12x + 9 = 0$, in questo caso abbiamo $\Delta = (12)^2 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0$ e la radice si trova con la relazione $x_1 = x_2 = -\frac{-b}{2a} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$, dunque $x_1 = x_2 = -\frac{3}{2}$. Siamo nel caso (B) dello schema precedente e sapendo che $a = 4 > 0$, esce il seguente grafico:



Ora guardando il verso della disequazione assegnata e il relativo grafico del segno si trova la soluzione $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

Esercizio 1
Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado facendo riferimento allo schema riportato ad inizio paragrafo:

a) $3x^2 + x + 1 > 0$ *b)* $-x^2 + 16 \geq 0$ *c)* $3x^2 + 9x \geq 0$

d) $-x^2 - x + 2 \geq 0$ *e)* $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ *f)* $2x^2 + 1 < 0$

g) $x^2 - 6x + 9 > 0$ *h)* $-x^2 - 7 < 0$ *i)* $-x^2 + 8x - 16 < 0$

2 Disequazioni razionali fratte

In questa sezione vogliamo discutere di un'altra classe di disequazioni, le disequazioni frazionarie o fratte e lo faremo utilizzando la regola dei segni. In altre parole troveremo le soluzioni della disequazione posta studiando il segno sia del numeratore che del denominatore, faremo un rappresentazione dei segni e dalla sua analisi scriveremo le soluzioni. Vediamo però in pratica come si procede.

Esempio 5 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$\frac{2x+1}{-x^2+9} \leq 0$$

Svolgimento
Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore.

- (**Numeratore**) $2x + 1 \geq 0 \longrightarrow$ In questo caso trattasi di una semplice disequazione di primo grado e quindi $x \geq -\frac{1}{2}$, dunque $S_1 = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

- (**Denominatore**) $-x^2+9>0 \longrightarrow$ Determiniamo le soluzioni dell'equazione associata $-x^2+9=0$. L'equazione è pura e ammette due soluzioni distinte che è facile determinare. Dunque $x_1=-3$ e $x_2=3$, siamo nel caso (A) dello schema dato nel primo paragrafo e sapendo che per valori esterni il trinomio è negativo perché $a=-1<0$, concludiamo che per valori interni il trinomio sarà positivo. La soluzione della disequazione è $S_2=(-3,3)$.

A questo punto avendo "in mano" il segno del numeratore e del denominatore possiamo fare il seguente grafico:

		-3		$-\frac{1}{2}$		3	
$2x+1$	$-$		$-$	$\bullet$	$+$		$+$
$-x^2+9$	$-$	$\circ$	$+$		$+$	$\circ$	$-$
$\frac{N}{D}$	$+$	$\circ$	$-$	$\bullet$	$+$	$\circ$	$-$

Dopo aver rappresentato il segno del numeratore e del denominatore, guardando il verso della disequazione assegnata che nel nostro caso è ≤ 0 e la linea in corrispondenza di $\frac{N}{D}$, possiamo concludere che la soluzione della disequazione è $S=\left(-3,-\frac{1}{2}\right] \cup (3,+\infty)$.

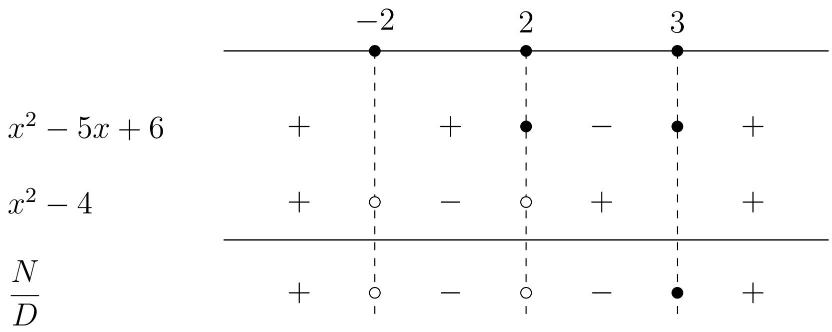
Esempio 6 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-4} \geq 0$$

Svolgimento
Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore.

- (**Numeratore**) $x^2-5x+6 \geq 0 \longrightarrow$ Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata $x^2-5x+6=0$, in questo caso abbiamo $\Delta=(-5)^2-4(1)(6)=25-24=1$, dunque $\Delta=1>0$ e le radici si trovano applicando la formula risolutiva. Si trova $x_1=2$ e $x_2=3$. Siamo nel caso (A) dello schema dato nel primo paragrafo e sapendo che $a=1>0$, concludiamo che $S_1=(-\infty,2] \cup [3,+\infty)$.
- (**Denominatore**) $x^2-4>0 \longrightarrow$ Determiniamo le soluzioni dell'equazione associata $x^2-4=0$. L'equazione è pura e ammette due soluzioni distinte che è facile determinare. Dunque $x_1=-2$ e $x_2=2$, siamo nel caso (A) dello schema dato nel primo paragrafo e sapendo che per valori esterni il trinomio è positivo perché $a=1>0$, concludiamo che per valori esterni il trinomio sarà positivo. La soluzione della disequazione è $S_2=(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$.

A questo punto avendo "in mano" il segno del numeratore e del denominatore possiamo fare il seguente grafico:



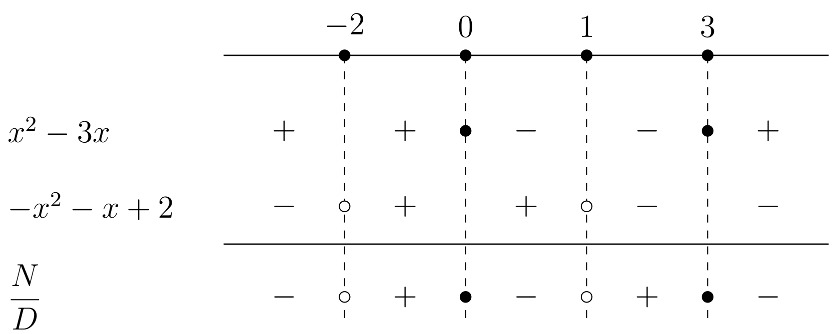
Dopo aver rappresentato il segno del numeratore e del denominatore, guardando il verso della disequazione assegnata che nel nostro caso è ≥ 0 e la linea in corrispondenza di $\frac{N}{D}$, possiamo concludere che la soluzione della disequazione è $S = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$.

Esempio 7 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$\frac{x^2 - 3x}{-x^2 - x + 2} \leq 0$$

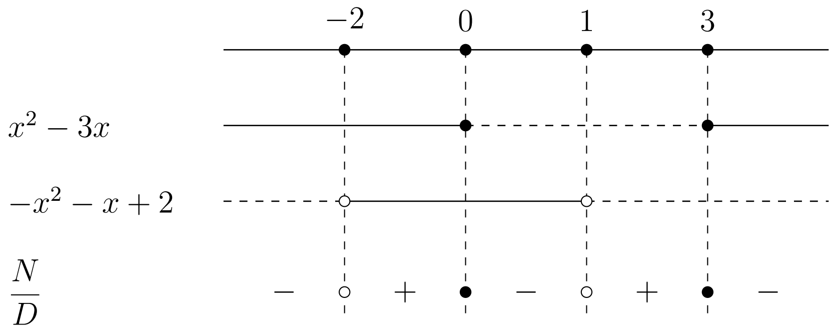
Svolgimento
Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore.

- (**Numeratore**) $\quad x^2 - 3x \geq 0 \longrightarrow$ Determiniamo le soluzioni dell'equazione associata $x^2 - 3x = 0$. L'equazione è spuria e ammette due soluzioni distinte che è facile determinare. Dunque $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$, siamo nel caso (A) dello schema del primo paragrafo e sapendo che per valori esterni il trinomio è positivo perché $a = 1 > 0$, concludiamo che la soluzione della disequazione è $S_1 = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$.
- (**Denominatore**) $\quad -x^2 - x + 2 > 0 \longrightarrow$ Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata $-x^2 - x + 2 = 0$ o in maniera equivalente di $x^2 + x - 2 = 0$, in questo caso abbiamo $\Delta = 1^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9$, dunque $\Delta = 9 > 0$ e le radici si trovano applicando la formula risolutiva. Si trova $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$. Siamo nel caso (A) dello schema dato nel primo paragrafo e sapendo che $a = -1 < 0$, concludiamo che $S_2 = (-2, 1)$. A questo punto avendo "in mano" il segno del numeratore e del denominatore prossiamo fare il seguente grafico:



Dopo aver rappresentato il segno del numeratore e del denominatore, guardando il verso della disequazione assegnata che nel nostro caso è ≤ 0 e la linea in corrispondenza di $\frac{N}{D}$, possiamo concludere che la soluzione della disequazione è $S = (-\infty, -2) \cup [0, 1) \cup [3, +\infty)$.

Osservazione 1 *Voglio far vedere ora che esiste un altro modo per poter rappresentare il segno del numeratore e del denominatore che a mio avviso sembra più efficace e meno artificioso per poter determinare le soluzioni della disequazione. Però bisogna dare la giusta interpretazione, in questo caso* ***”linea continua”*** *vuol dire segno positivo e* ***”linea tratteggiata”*** *vuol dire segno negativo. Con questa interpretazione la disequazione precedente si rappresenta nel seguente modo:*



Esercizio 2

Risolvere le seguenti disequazioni fratte:

a) $\dfrac{3x^2 - x}{x^2 - 1} < 0$ *b)* $\dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - x} \geq 0$ *c)* $\dfrac{-4x^2 + 9}{x^2 + 2x + 1} \leq 0$

d) $\dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 2x - 3} > 0$ *e)* $\dfrac{4x^2 - 1}{x^2} \leq 0$ *f)* $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x + 1} \leq 0$