Divisione tra polinomi e schema di Ruffini

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola 7 Marzo 2024

Esempio 1 *Supponiamo che ci vengano assegnati i seguenti polinomi:*

$$a(x) = 6x^7 - 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 - x + 1 \qquad\qquad b(x) = 2x^2 - 1$$

e ci viene chiesto di eseguire la divisione $a(x) : b(x)$, allora noi con molta calma operiamo nel seguente modo:

$$\begin{array}{l|l}
6x^7 - 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 + x + 2 & 2x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
-6x^7 + 3x^5 & 3x^5 - 2x^2 + x - 1 \\ \cline{1-1}
-4x^4 + 2x^3 + x + 2 & \\
4x^4 - 2x^2 & \\ \cline{1-1}
2x^3 - 2x^2 + x + 2 & \\
-2x^3 + x & \\ \cline{1-1}
-2x^2 + 2x + 2 & \\
2x^2 - 1 & \\ \cline{1-1}
2x + 1 &
\end{array}$$

La divisione ha termine in quanto $r(x) = 2x + 1$ ha grado 1 che è minore del grado del divisore $b(x) = 2x^2 - 1$ e il cui grado è 2. Osserviamo che il polinomio quoziente è $q(x) = 3x^5 - 2x^2 + x - 1$ e vale la relazione $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$. Potete verificare svolgendo i calcoli a destra che si ottiene il polinomio di sinistra:

$$6x^7 - 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 + x + 2 = (2x^2 - 1) \cdot (3x^5 - 2x^2 + x - 1) + 2x + 1$$

Quando il grado del polinomio divisore è uguale a 1 ed è monico (il parametro direttore $p.d. = 1$), allora in alternativa al procedimento evidenziato in precedenza è possibile adottare lo schema di Ruffini. Supponiamo che ci vengano assegnati i seguenti polinomi:

$$a(x) = 2x^5 + 10x^2 - 8x - 4 \qquad\qquad b(x) = x + 2$$

e ci viene chiesto di eseguire la divisione $a(x) : b(x)$. Vediamo come si svolge l'esercizio utilizzando lo schema di Ruffini e tenendo conto che il polinomio divisore è $b(x) = x + 2$:

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 2 & 0 & 0 & 10 & -8 & -4 \\
-2 & & -4 & 8 & -16 & 12 & -8 \\ \hline
 & 2 & -4 & 8 & -6 & 4 & -12
\end{array}$$

Possiamo concludere che $q(x) = 2x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 6x + 4$ e $r(x) = -12$. Nella parte a destra dello schema compare il polinomio resto $r(x)$ che sappiamo essere una costante e nella parte centrale ci sono i coefficienti di un polinomio di grado inferiore a uno rispetto al grado del polinomio dividendo di partenza.

Abbiamo detto che per poter utilizzare il metodo di Ruffini il polinomio divisore deve essere monico di primo grado e quindi del tipo $p(x) = x+b$. Se il polinomio è ancora di primo grado ma non monico possiamo utilizzare Ruffini? In altre parole se il polinomio divisore è del tipo $p(x) = ax+b$ possiamo applicare Ruffini? La risposta è affermativa perchè possiamo applicare una furbata e risolvere la questione.

Esercizio 2 *Eseguire la divisione tra polinomi $a(x) : b(x)$ con*

$$a(x) = 4x^4 - 2x^2 + 1 \text{ e } b(x) = 2x + 1$$

Soluzione: $q(x) = 2x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ *e* $r(x) = \frac{3}{4}$

Esempio 3 *Supponiamo che ci vengano assegnati i seguenti polinomi:*

$$a(x) = 2a^2x^3 - 4ax^2 - 2a + 1 \qquad\qquad b(x) = ax^2 + 1$$

e ci viene chiesto di eseguire la divisione $a(x) : b(x)$, allora noi con molta calma operiamo nel seguente modo (il divisore non ha grado 1 e non possiamo applicare lo schema di Ruffini):

$$\begin{array}{l|l}
2a^2x^3 - 4ax^2 - 2a + 1 & ax^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-2a^2x^3 - 2ax & 2ax - 4 \\ \hline
-4ax^2 - 2ax - 2a + 1 & \\
4ax^2 + 4 & \\ \hline
-2ax - 2a + 5 &
\end{array}$$

La divisione ha termine in quanto $r(x) = -2ax - 2a + 5$ ha grado 1 che è minore del grado del divisore $b(x) = ax^2 + 1$ e il cui grado è 2. Osserviamo che il polinomio quoziente è $q(x) = 2ax - 4$ e vale la relazione $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$. Potete verificare svolgendo i calcoli a destra che si ottiene il polinomio di sinistra:

$$2a^2x^3 - 4ax^2 - 2a + 1 = (ax^2 + 1) \cdot (2ax - 4) - 2ax - 2a + 5$$

Esercizio 4 *Eseguire la divisione tra polinomi $a(x) : b(x)$ con*

$$a(x) = 6a^2x^5 - 2ax^3 + 3ax^2 + ax + 2 \text{ e } b(x) = 3ax^2 - 1$$

Soluzione: $q(x) = 2ax^3 + 1$ *e* $r(x) = ax + 3$

Voglio proprio vedere il vostro ingegno all'opera!!!

Esercizio 5 *Supponendo $a \neq 0$, eseguire la divisione tra polinomi $a(x) : b(x)$ con*

$$a(x) = 2a^4x^4 + 2a^5x^3 + a^2x + a^3 + 2a^2 \text{ e } b(x) = a^2x + a^3$$

Soluzione: $q(x) = 2a^2x^3 + 1$ *e* $r(x) = 2a^2$