

Studio del grafico di una funzione

Liceo "ASSTEAS"-Buccino-

27 Febbraio 2026

Esempio 1 Studiare il grafico della funzione $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

Per portare a termine l'esercizio indagheremo su alcuni punti fondamentali:

(1) Dominio di f

Abbiamo una funzione razionale fratta, dunque la nostra attenzione deve essere rivolta al denominatore e quindi: $x^2 - 1 \neq 0 \implies x \neq -1 \wedge x \neq 1$. Possiamo concludere che il dominio della funzione è $X = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ oppure utilizzando la notazione degli intervalli $X = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(2) Proprietà di f

Osserviamo che $f(-x) = -\frac{x}{x^2 - 1} \implies -f(-x) = f(x)$ e quindi la funzione è dispari, ovvero il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine del riferimento cartesiano. Osserviamo che una funzione dispari definita in $x = 0$ passa necessariamente per l'origine del riferimento. Non è vero che tutte le funzioni dispari passano per l'origine, ad esempio $f(x) = \frac{1}{x}$ è una funzione dispari che non passa per l'origine in quanto non è definita in $x = 0$.

(3) Studio del segno di f

$\frac{x}{x^2 - 1} \geq 0$ Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore.

- (**Numeratore**) $x \geq 0$, dunque $S_1 = [0, +\infty)$
- (**Denominatore**) $x^2 - 1 > 0$, dunque $S_2 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

A questo punto avendo "in mano" il segno del numeratore e del denominatore possiamo costruire il seguente grafico:

		-1		-0		1	
		•		•		•	
x	-		-	•	+		+
$x^2 - 1$	+	○	-		-	○	+
$\frac{N}{D}$	-	○	+	•	-	○	+

f è positiva $\forall x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

f è negativa $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

f è nulla per $x = 0$

(4) Intersezione con gli assi cartesiani

Dall'ultimo punto precedente si trova $O \equiv (0, 0)$, il grafico passa per l'origine del riferimento. Riportiamo i dati appena acquistati in un piano cartesiano:

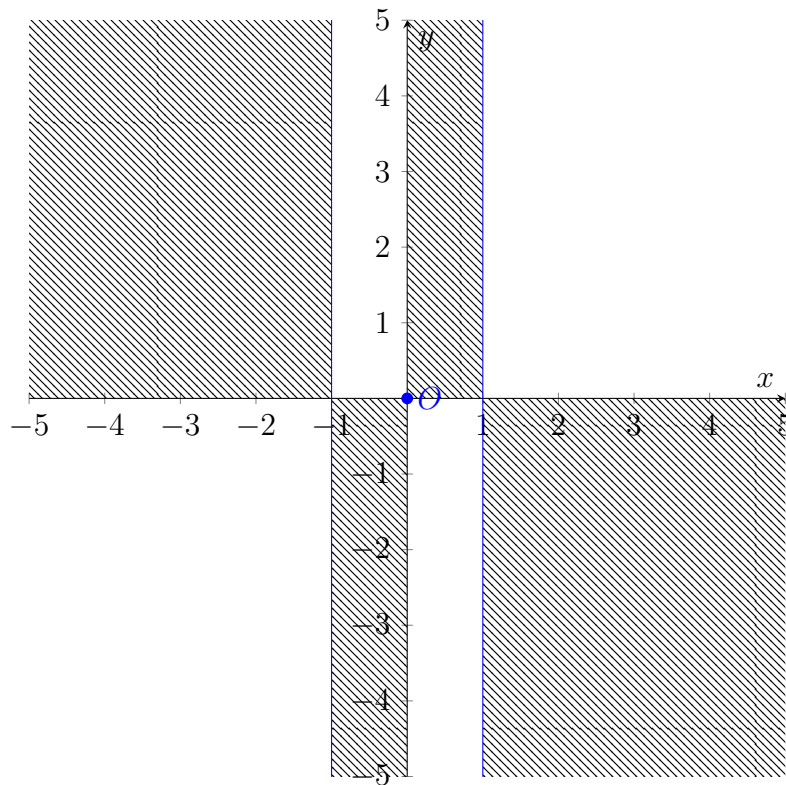


Figura 1: Dati iniziali studio del grafico della funzione

Ricordiamo che nelle zone tratteggiate non ci sarà nessun grafico della funzione.

(5) Limiti di f

Ricordiamo che il dominio della funzione è $X = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-.$$

Avendo calcolato questi limiti, gli altri li possiamo dedurre dalla proprietà che f è dispari e quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+.$$

Dai calcoli effettuati possiamo dedurre che $x = -1$ e $x = 1$ sono asintoti verticali e $y = 0$ (l'asse delle ascisse) è un asintoto orizzontale, evidentemente non esistono asintoti obliqui.

(6) Studio del segno di f'

Utilizzando la regola di derivazione delle funzioni fratte si trova:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}, \text{ in forma compatta possiamo scrivere:}$$

$f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$. Si deduce dall'espressione che $f'(x) < 0 \quad \forall x \in X$ e quindi la funzione è *strettamente decrescente in X* .

(7) Studio del segno di f''

Sempre utilizzando la regola di derivazione delle funzioni fratte, dobbiamo derivare la funzione $f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$, si trova:

$$f''(x) = -\frac{2x(x^2-1)^2 - 4x(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = -2x(x^2-1)\frac{x^2-1-2x^2-2}{(x^2-1)^4} =$$

$= -2x\frac{-x^2-3}{(x^2-1)^3}$, in forma compatta possiamo scrivere che $f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$. Ora studiamo il segno della derivata seconda:

	-1	-0	1	
	•	•	•	
$2x$	-	-	+	+
$(x^2-1)^3$	+	-	-	+
$\frac{N}{D}$	-	+	-	+
	○	•	○	+
	⌒	⌒	⌒	⌒

f'' è positiva $\forall x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, allora f convessa.

f'' è negativa $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, allora f è concava.

f'' è nulla per $x = 0$, la funzione in tale punto presenta un flesso.

Ora siamo in grado di tracciare il grafico:

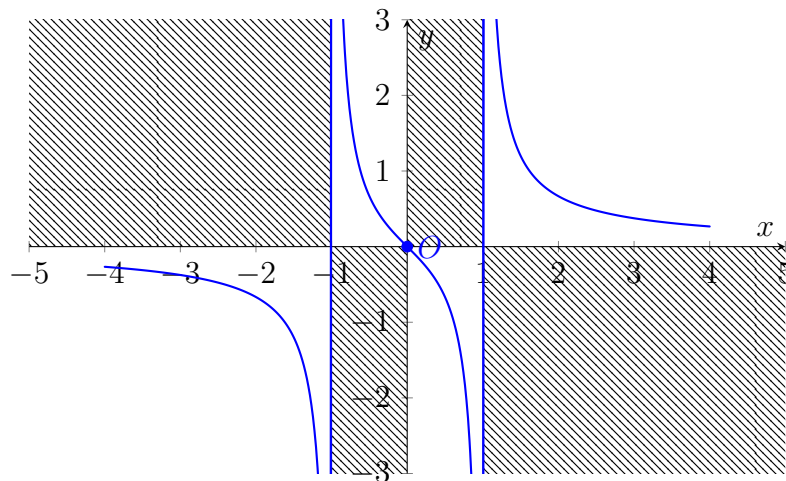


Figura 2: Il grafico della funzione $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$