

Studio del grafico di una funzione irrazionale

Liceo Assteas -Buccino-

F. FERNICOLA

6 Marzo 2026

Esempio 1 Studiare il grafico della funzione $f(x) = 3x + 4\sqrt{1-x^2}$

Per portare a termine l'esercizio indagheremo su alcuni punti fondamentali:

(1) Dominio di f

Abbiamo una funzione irrazionale, dunque la nostra attenzione deve essere rivolta al radicale che avendo indice pari: $1 - x^2 \geq 0 \iff -1 \leq x \leq 1$. Possiamo concludere che il dominio della funzione è $X = [-1, 1]$.

(2) Proprietà di f

La funzione non ha particolari proprietà, ovvero non è pari, dispari o periodica.

(3) Studio del segno di f

$3x + 4\sqrt{1-x^2} \geq 0 \iff 4\sqrt{1-x^2} \geq -3x$. Trattasi di una disequazione irrazionale:

$$S_1 : \begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ -3x < 0 \end{cases} \cup S_2 : \begin{cases} -3x \geq 0 \\ 16(1-x^2) \leq 9x^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff S_1 : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \cup S_2 : \begin{cases} x \leq 0 \\ -\frac{4}{5} \leq x \leq \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$S_1 = (0, 1] \text{ e } S_2 = \left[-\frac{4}{5}, 0\right], \text{ allora } S_1 \cup S_2 = \left[-\frac{4}{5}, 1\right].$$

$$f \text{ è positiva } \forall x \in \left(-\frac{4}{5}, 1\right]$$

$$f \text{ è negativa } \forall x \in \left[-1, -\frac{4}{5}\right)$$

$$f \text{ è nulla per } x = -\frac{4}{5}$$

(4) Intersezione con gli assi cartesiani

Dall'ultimo punto precedente possiamo concludere che il grafico di f interseca l'asse x nei punti $P \equiv \left(-\frac{4}{5}, 0\right)$. Osserviamo che $f(0) = 4$ e quindi interseca l'asse delle y nel punto $Q \equiv (0, 4)$. Riportiamo i dati appena acquisiti in un piano cartesiano:

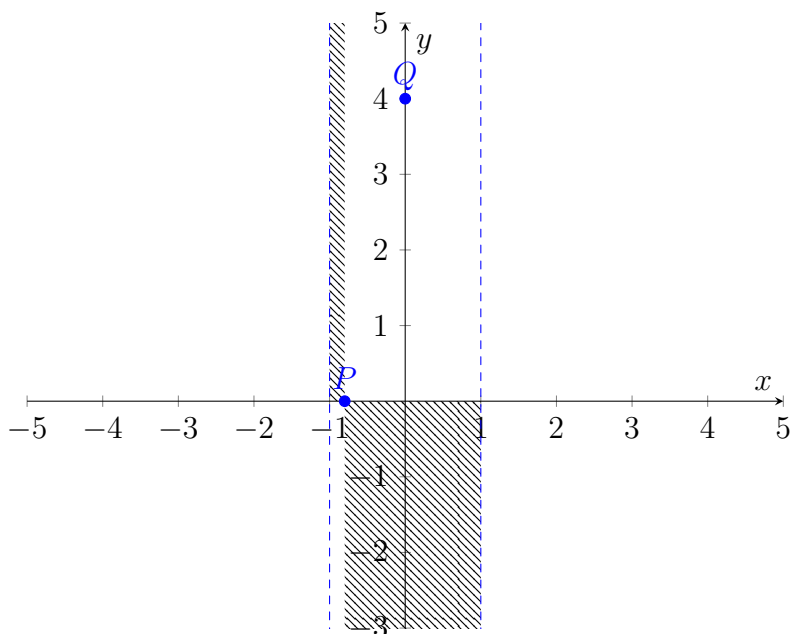


Figura 1: Dati iniziali studio del grafico della funzione

Ricordiamo che nelle zone tratteggiate non ci sarà nessun grafico della funzione.

(5) Limiti di f

Trattasi di una funzione continua in $X = [-1, 1]$, il massimo che possiamo fare è calcolare il valore della funzione agli estremi dell'intervallo per riportare due punti aggiuntivi nella rappresentazione del grafico e quindi:

$f(-1) = -3$ e $f(1) = 3$. Si hanno i due punti $R \equiv (-1, -3)$ e $S \equiv (1, 3)$.

(6) Studio del segno di f'

Osserviamo che $f(x) = 3x + 4\sqrt{1-x^2}$

Utilizzando le regole di derivazione si trova: $f'(x) = 3 + 4\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ e quindi

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{1-x^2} - 4x}{\sqrt{1-x^2}}. \text{ Studiamo il segno: } \frac{3\sqrt{1-x^2} - 4x}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0 \iff 3\sqrt{1-x^2} - 4x \geq 0.$$

Abbiamo già studiato all'inizio una disequazione di questo tipo. Con un minimo di pazienza si trova:

f' è positiva $\forall x \in \left(-1, \frac{3}{5}\right)$, allora f è strettamente crescente.

f' è negativa $\forall x \in \left(\frac{3}{5}, 1\right)$, allora f è strettamente decrescente.

f' è nulla per $x = \frac{3}{5}$. Si ha un punto di massimo relativo in $x = \frac{3}{5}$ e quindi $f\left(\frac{3}{5}\right) = 5$ e di conseguenza il massimo relativo ha coordinate $M \equiv \left(\frac{3}{5}, 5\right)$.

Osserviamo esplicitamente che $f'_+(-1) = +\infty$ e $f'_-(1) = -\infty$. Quindi $x = -1$ e $x = 1$ sono punti di non derivabilità, rispettivamente una retta tangente destra e sinistra verticale.

(7) Studio del segno di f''

Sempre utilizzando la regola di derivazione delle funzioni fratte, dobbiamo derivare la funzione $f'(x) = 3 + 4\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, si trova:

$$f''(x) = \frac{-4}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

f'' è negativa $\forall x \in (-1, 1)$, allora f è concava.

Ora siamo in grado di tracciare il grafico:

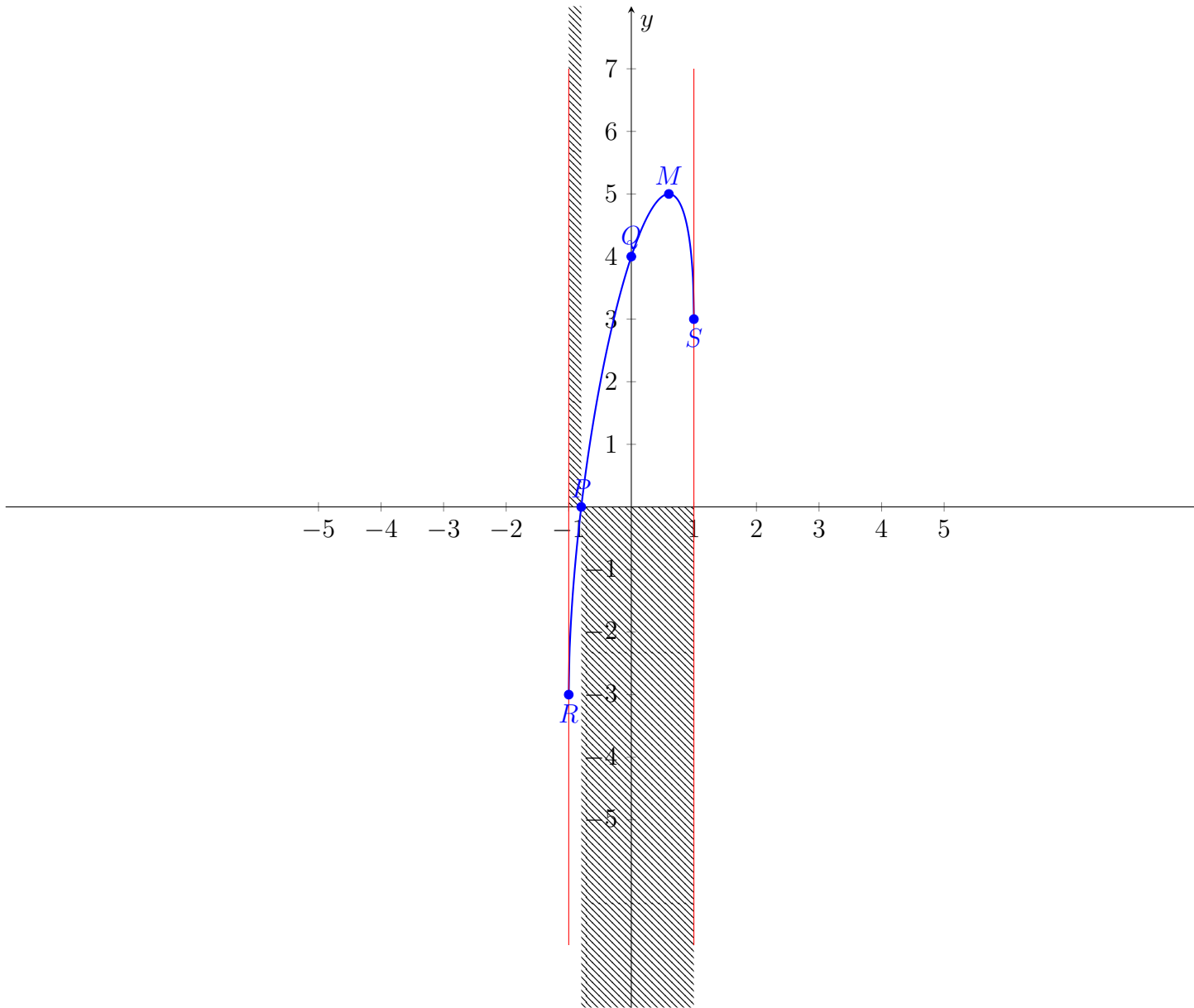


Figura 2: Grafico della funzione $f(x) = 3x + 4\sqrt{1-x^2}$