

Esercizio 1. Studiare parzialmente il grafico della funzione $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}}$.

Svolgimento

1° Passo: Dominio

Il dominio X della funzione si trova imponendo la condizione $x^2 - x > 0 \iff x < 0 \vee x > 1$.

Concludiamo che $X = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

2° Passo: Proprietà di f

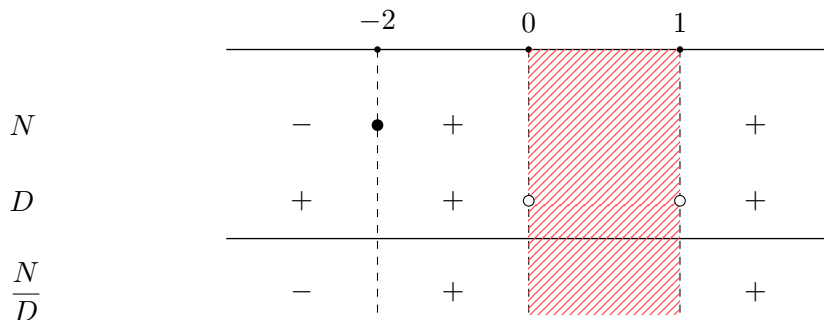
Poichè il dominio X non ha simmetria rispetto a 0 la funzione non può essere nè pari, nè dispari. La funzione evidentemente non è periodica.

3° Passo: Studio del segno di f

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}} \geq 0.$$

$$N : x+2 \geq 0 \iff x \geq -2.$$

$$D : \sqrt{x^2-x} > 0 \iff x < 0 \vee x > 1.$$



Possiamo concludere:

f positiva in $S_1 = (-2, 0) \cup (1, +\infty)$

f negativa in $S_2 = (-\infty, -2)$

4° Passo: Intersezione con gli assi

Dal punto precedente si osserva che il grafico di f interseca l'asse delle ascisse nel punto $P \equiv (-2, 0)$ infatti $f(-2) = 0$. Non ha intersezioni con l'asse delle ordinate in quanto $0 \notin X$.

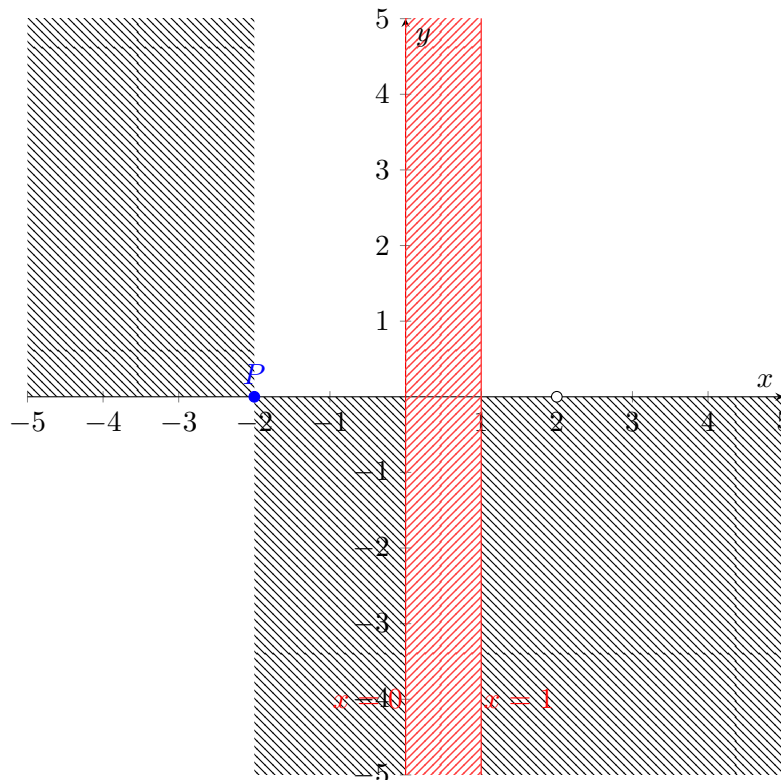


Figura 1: Dati parziali studio del grafico della funzione

5° Passo: limiti ai bordi del dominio

Riferendoci al dominio $X = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ calcoliamo i limiti ai bordi del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}}.$$

Calcoliamo prima i limiti al finito e quindi: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}} = \frac{2}{0^+} = +\infty$.

Osservazione 1. Vi informo di nuovo, cose già dette diverse volte in altrettanti file, quando il numeratore tende ad un valore diverso da 0 e il denominatore tende a 0 ci sta una divergenza e il segno della divergenza $\pm\infty$ va stabilito di volta in volta in base al segno del numeratore e denominatore (che può essere 0^+ o 0^-). Nel nostro caso il denominatore è di sicuro un 0^+ perchè è il segno di una radice con indice pari e non può essere che positivo, se avete dubbi guardate a sinistra di 0 nel grafico del segno della funzione che è stato svolto in alto.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}} = \frac{3}{0^+} = +\infty$. Vale quanto detto nell'osservazione precedente.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{-1} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{+1} = 1.$$

Dai primi due limiti al finito deduciamo rispettivamente che $x = 0$ è un asintoto verticale sinistro e $x = 1$ è un asintoto verticale destro. Gli ultimi due limiti di ci dicono rispettivamente che $y = -1$ è un asintoto orizzontale sinistro e $y = 1$ è un asintoto orizzontale destro. Non mi fate dire perchè è inutile indagare sull'esistenza di asintoti obliqui.

Prima di chiudere questa nota, anche se è fuori luogo facciamo un'osservazione per gli asintoti obliqui, ripeto è una parentesi per rinfrescare la memoria sugli asintoti obliqui.

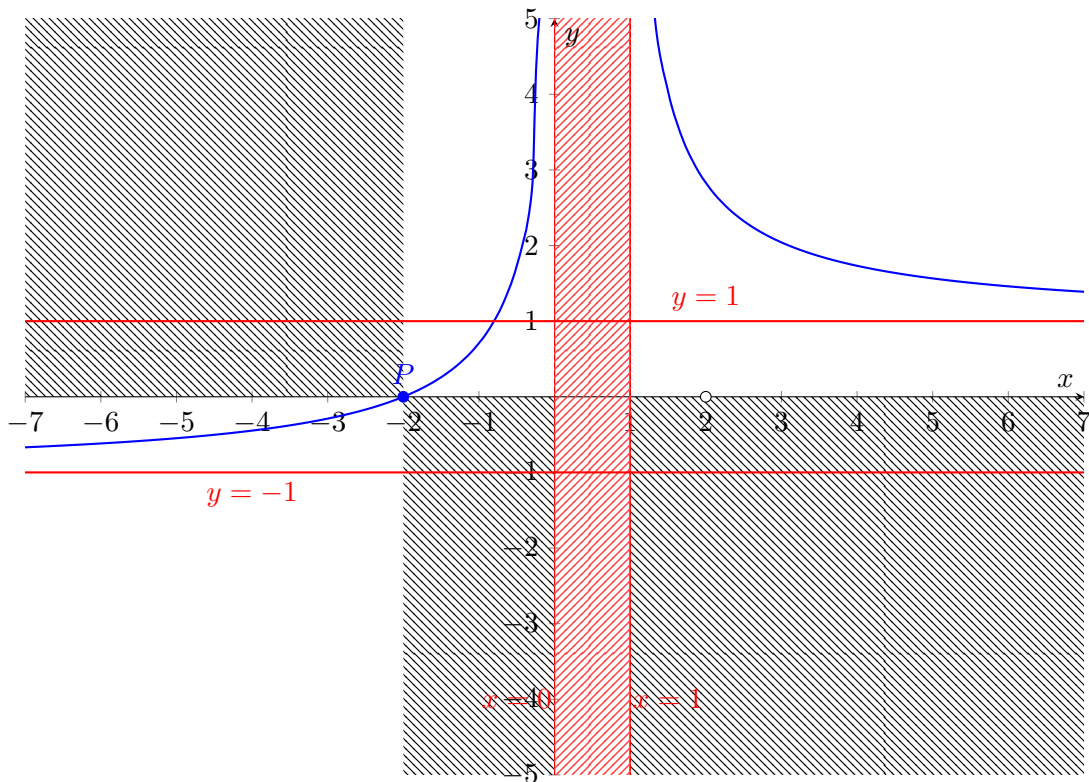


Figura 2: Dati parziali studio del grafico della funzione

Osservazione 2. Supponiamo di avere una funzione $f(x)$ e il suo dominio X sia illimitato inferiormente o superiormente, quindi ha senso calcolare $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ o $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. La considerazione la facciamo per $-\infty$ ma vale lo stesso ragionamento per $+\infty$. Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, ovvero supponiamo che esista in $-\infty$ una divergenza, allora possiamo indagare sull'esistenza di un eventuale asintoto obliquo. Cosa facciamo? Calcoliamo immediatamente $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ e questo limite deve essere finito e diverso da 0, insomma deve essere un numero $m \neq 0$ perché deve essere il coefficiente angolare di una retta obliqua e come tale deve essere un numero diverso da 0. Se il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ oppure $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \nexists$ avete finito le fatiche e dite che non esiste un asintoto obliquo. Se invece al contrario $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$, allora dovete continuare e calcolare immediatamente $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx]$ e se questo limite è finito, questa volta può essere anche 0, questo perché il limite appena menzionato rappresenta il q della retta e può essere anche 0, concludete che la retta $y = mx + q$ è un asintoto obliquo. Cosa può accadere? Che il $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \nexists$, allora anche se il primo limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ dovete concludere che il grafico della funzione non ammette asintoti obliqui. Lo stesso ragionamento vale per $+\infty$. Spero di essere stato chiaro. Vediamo se abbiamo capito!!! Quando calcolo il limite a $-\infty$ qual è la fortuna? Che tale limite non diverga a $-\infty$ o $+\infty$ così non vado ad indagare sui limiti obliqui! Qual è la semisfortuna? Che la funzione $f(x)$ diverga a $-\infty$ o $+\infty$ e il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \nexists$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ perché avete finito escludendo asintoti obliqui. Qual è la bisfortuna? Che la funzione $f(x)$ diverga a $-\infty$ o $+\infty$ e il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \nexists$ perché avete finito escludendo asintoti obliqui. Qual è la trisfortuna? Che la funzione $f(x)$ diverga a $-\infty$ o $+\infty$ e il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = q$, (numero finito anche nullo) perché avete finito ma dovete scrivere anche l'equazione dell'asintoto obliquo $y = mx + q$, che trisfortuna!!!!