

Esercizio 1. Studiare parzialmente il grafico della funzione $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$.

Osservazione 1. Con questa dicitura del parziale vogliamo intendere che noi facciamo uno studio parziale perché non abbiamo ancora sviluppato tutti gli elementi, tipo il calcolo differenziale, che contribuirà alla costruzione del grafico in modo chirurgico. Sul libro si parla di grafico probabile che potrebbe creare confusione pensando a qualcosa di incerto, ma in matematica l'incertezza non è di casa e io preferisco parlare di grafico parziale per il motivo che ho in precedenza precisato.

Svolgimento

1° Passo: Dominio

Il dominio X della funzione si trova imponendo la condizione $\sin x - 1 \neq 0$.

Concludiamo che $X = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$.

2° Passo: Proprietà di f

Si tratta di una funzione periodica di minimo periodo $T = 2\pi$. Vi invito a vedere nelle "Nozioni di base di Analisi" quanto detto riguardo al periodo T di una funzione periodica.

Ci limiteremo a studiare questa funzione in $S = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.

3° Passo: Studio del segno di f

$$\frac{\cos x}{\sin x - 1} \geq 0.$$

$$N : \cos x \geq 0 \iff x \in S_1 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

$$D : \sin x - 1 > 0 \iff S_2 = \emptyset.$$

Questo vuol dire che il denominatore è sempre negativo in $[0, 2\pi] - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.

	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
N	•	•	•	•
D	—	○	—	—
$\frac{N}{D}$	—	+	—	—

Possiamo concludere:

f positiva in $S_1 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

f negativa in $S_2 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

4° Passo: Intersezione con gli assi

Dal punto precedente si osserva che il grafico di f interseca l'asse delle ascisse nel punto $P \equiv \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$. Per determinare l'intersezione con l'asse delle ordinate è sufficiente calcolare $f(0) = -1$ e quindi $Q \equiv (0, -1)$. Osserviamo anche che $f(2\pi) = -1$ e quindi $R \equiv (2\pi, -1)$.

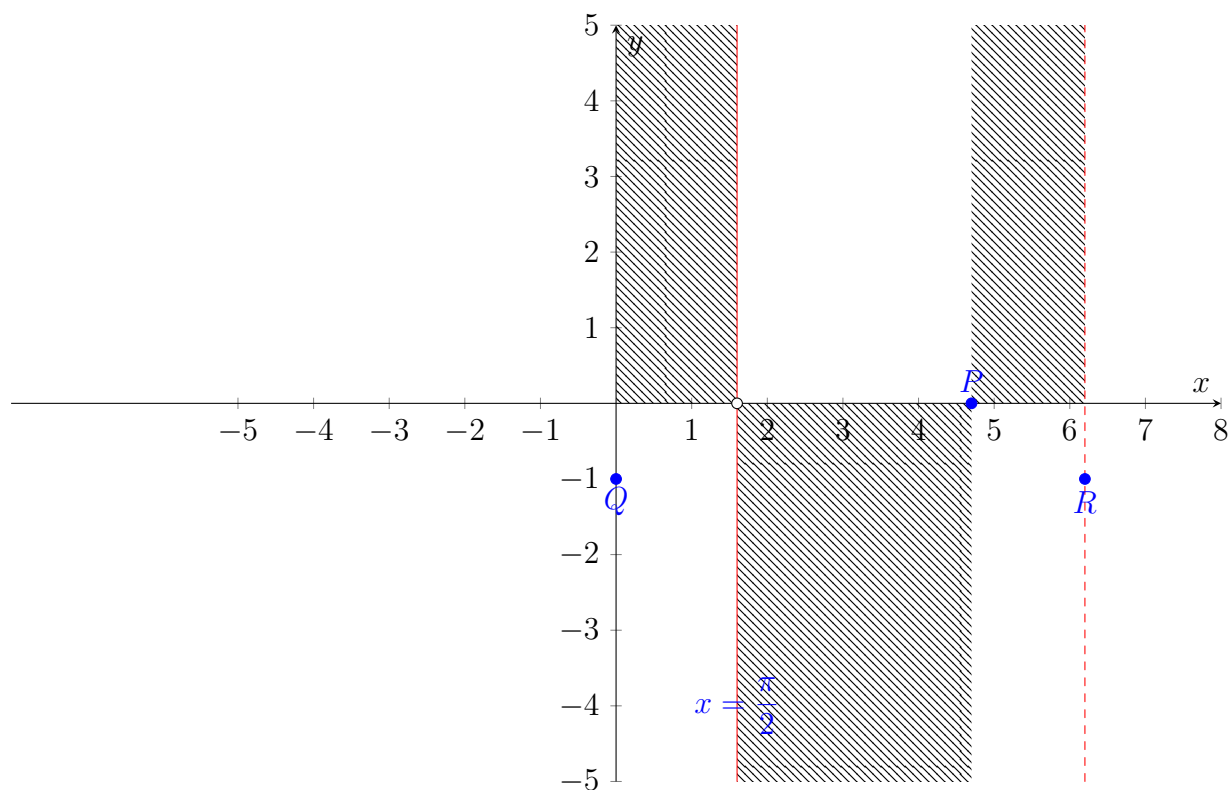


Figura 1: Dati parziali studio del grafico della funzione

5° Passo: limiti ai bordi del dominio

Riferendoci all'insieme $S = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ calcoliamo i limiti ai bordi del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\sin x - 1} \text{ e } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{\sin x - 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Il primo limite } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\sin x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\sin x - 1} \cdot \frac{\sin x + 1}{\sin x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x(\sin x + 1)}{(\sin x - 1)(\sin x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x(\sin x + 1)}{-\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} -\frac{\sin x + 1}{\cos x} = -\frac{2}{0^+} = -\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Il secondo limite } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{\sin x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{\sin x - 1} \cdot \frac{\sin x + 1}{\sin x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x(\sin x + 1)}{(\sin x - 1)(\sin x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x(\sin x + 1)}{-\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} -\frac{\sin x + 1}{\cos x} = -\frac{2}{0^-} = +\infty. \end{aligned}$$

I due limiti ci dicono che la retta $x = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto verticale.

