

Esercizio 1. Studiare parzialmente il grafico della funzione $f(x) = \frac{x}{|x - x^2|}$.

Svolgimento

1° Passo: Dominio

Il dominio X della funzione si trova imponendo la condizione $|x - x^2| \neq 0 \iff x \neq 0 \wedge x \neq 1$.

Concludiamo che $X = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Osservazione 1. Quando si studia una funzione con al suo interno un'espressione che contiene il valore assoluto il consiglio, almeno fin quando non si diventa esperti, di "spezzare" la funzione

scrivendola come "funzione per casi": $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{se } x < 0 \vee x > 1 \end{cases}$

2° Passo: Proprietà di f

Il dominio X non è simmetrico rispetto a 0 la funzione non può essere né pari, né dispari. La funzione evidentemente non è periodica.

3° Passo: Studio del segno di f

Per la funzione in alto non avrebbe senso uno studio accurato in quanto già sappiamo che si compone di una parte del grafico di un'iperbole traslata ciascuna riferita all'insieme indicato. Vi ricordo che un'iperbole traslata è una funzione del tipo $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ con $ad-bc \neq 0 \wedge c \neq 0$.

Vediamo però come proseguire comunque con un'analisi dettagliata. Dalla disequazione $\frac{x}{|x-x^2|} \geq 0$ si intuisce immediatamente:

f positiva in $S_1 = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

f negativa in $S_2 = (-\infty, 0)$

4° Passo: Intersezione con gli assi

E' evidente che la funzione non interseca gli assi cartesiani.

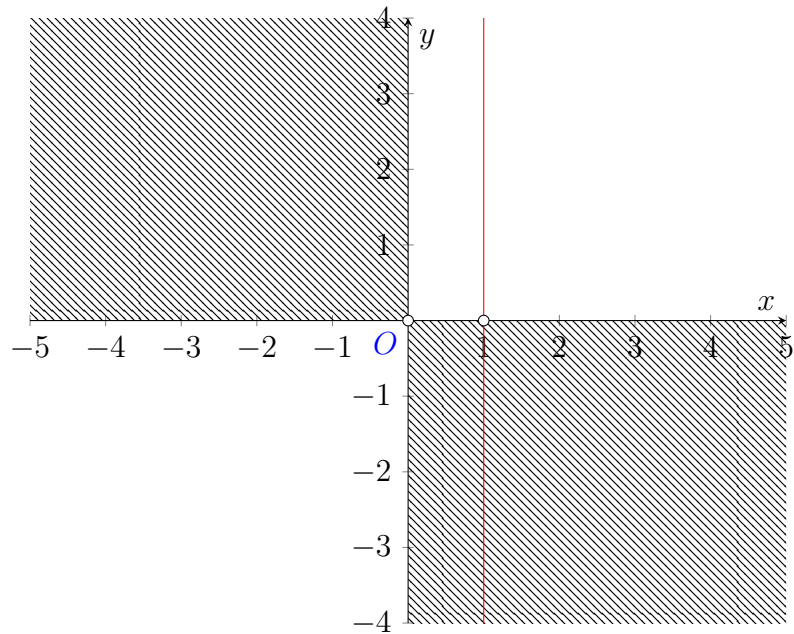


Figura 1: Dati parziali studio del grafico della funzione

5° Passo: limiti ai bordi del dominio

Riferendoci al dominio $X = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ calcoliamo i limiti ai suoi bordi. Calcoliamo prima i limiti in punti al finito e poi i restanti, in questo aiutiamoci con l'espressione della funzione per casi: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x - x^2|} = -1$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x - x^2|} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{|x - x^2|} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{|x - x^2|} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x - x^2|} = 0^-$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x - x^2|} = 0^+$. Dall'analisi dei primi due limiti in alto si può dire che in $x = 0$ esiste una singolarità di prima specie, mentre i due limiti centrali ci dicono che la retta $x = 1$ è un asintoto verticale e gli ultimi due limiti ci permettono di affermare che la retta $y = 0$ ovvero l'asse delle ascisse è un asintoto orizzontale.

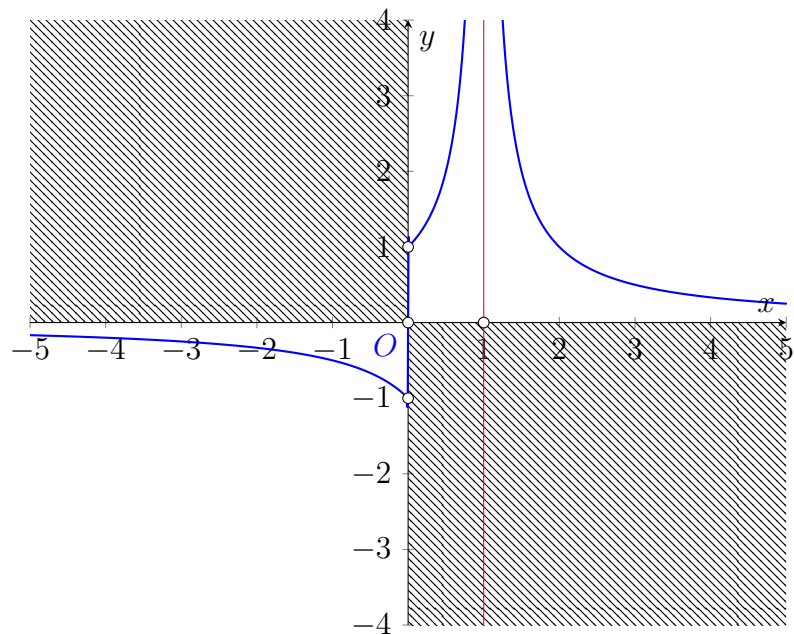


Figura 2: Dati parziali studio del grafico della funzione