

Esercizio 1. Studiare parzialmente il grafico della funzione $f(x) = \frac{\ln x}{\ln x - 1}$.

Osservazione 1. Su questo punto vorrei fare però questa osservazione, in linea di massima non starei tanto a "ricamare" sulle non proprietà della funzione ma evidenzierei questo punto quando la funzione gode di qualche proprietà. Si lascia allo studente di decidere cosa fare a riguardo. In altre parole direi quando una funzione, ad esempio, è pari e non mi pronuncerei nel dire che una funzione non è pari. Così per il resto delle altre proprietà, spero di essere stato chiaro. Però se uno sa quello che dice è giusto evidenziare tutto, anche le non proprietà delle funzioni come in questo caso.

Svolgimento

1° Passo: Dominio

Il dominio X della funzione si trova imponendo la condizione $x > 0 \wedge \ln x - 1 \neq 0 \iff \iff x > 0 \wedge x \neq e$. Concludiamo che $X = (0, e) \cup (e, +\infty)$.

2° Passo: Proprietà di f

Poichè il dominio X non ha simmetria rispetto a 0 la funzione non può essere nè pari, nè dispari. La funzione evidentemente non è periodica in quanto il dominio non è illimitato inferiormente.

Osservazione 2. Su questo punto vorrei fare però questa osservazione, in linea di massima non starei tanto a "ricamare" sulle non proprietà della funzione ma evidenzierei questo punto quando la funzione gode di qualche proprietà. Si lascia allo studente di decidere cosa fare a riguardo. In altre parole direi quando una funzione, ad esempio, è pari e non mi pronuncerei nel dire che una funzione non è pari. Così per il resto delle altre proprietà, spero di essere stato chiaro. Però se uno sa quello che dice è giusto evidenziare tutto anche le non proprietà delle funzioni come in questo caso

3° Passo: Studio del segno di f

$$\frac{\ln x}{\ln x - 1} \geq 0.$$

$$N : \ln x \geq 0 \iff x \geq 1.$$

$$D : \ln x - 1 > 0 \iff \ln x > 1 \iff x > e.$$

	0		1		e	
N	$\circ$	-	$\bullet$	+		+
D	$\circ$	-		-	$\circ$	+
$\frac{N}{D}$		+		-		+

Possiamo concludere:

f positiva in $(0, 1) \cup (e, +\infty)$

f negativa in $(1, e)$

4° Passo: Intersezione con gli assi

Dal punto precedente si osserva che il grafico di f interseca l'asse delle ascisse nel punto $P \equiv (1, 0)$. Dal dominio X si intuisce che il grafico di f non interseca l'asse delle ordinate in quanto $0 \notin X$.

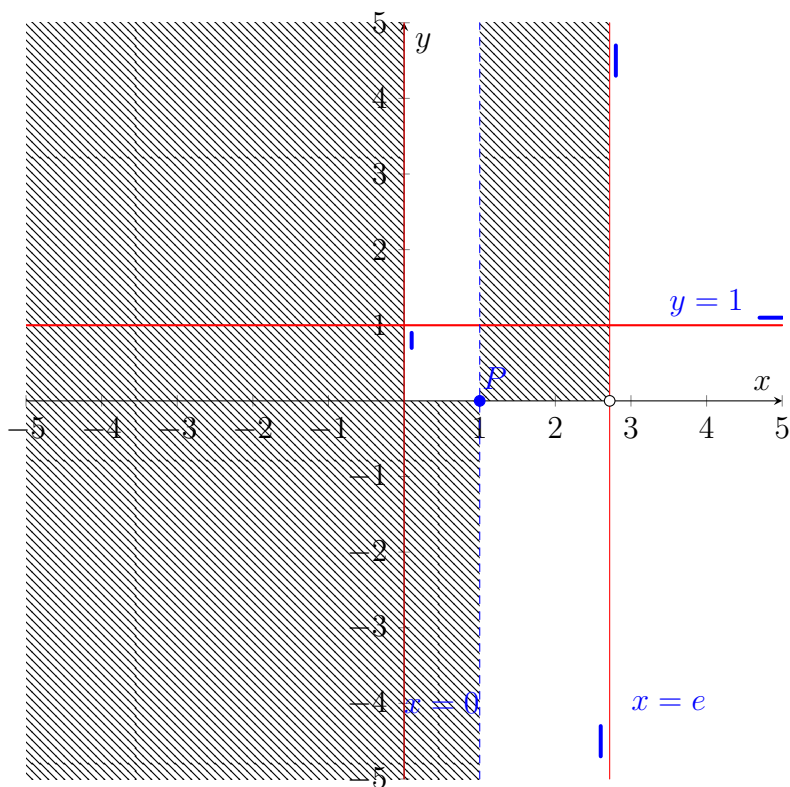


Figura 1: Dati parziali studio del grafico della funzione

5° Passo: limiti ai bordi del dominio

Riferendoci al dominio $X = (0, e) \cup (e, +\infty)$ calcoliamo i limiti ai bordi del dominio:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln x - 1}$, $\lim_{x \rightarrow e^-} \frac{\ln x}{\ln x - 1}$, $\lim_{x \rightarrow e^+} \frac{\ln x}{\ln x - 1}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln x - 1}$. Il primo limite si presenta in forma indeterminata $\frac{-\infty}{-\infty}$ e con manipolazione:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln x \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)} = \frac{1}{1 - 0} = 1. \text{ Il secondo limite}$$

$\lim_{x \rightarrow e^-} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$. Che il limite diverge a $-\infty$ si può dedurre guardando in alto il grafico del segno della funzione a sinistra di e . Ricordate che ogni volta che il numeratore è un numero diverso da 0 e il denominatore tende a 0 esiste una divergenza. Il terzo $\lim_{x \rightarrow e^+} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

Che il limite diverge a $+\infty$ si può dedurre guardando in alto il grafico del segno della funzione a destra di e . Ricordate che ogni volta che il numeratore è un numero diverso da 0 e il denominatore

tende a 0 esiste una divergenza.

Il quarto limite si presenta in forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$ e con manipolazione:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln x \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)} = \frac{1}{1 - 0} = 1.$$

Osservazione 3. *Il primo e quarto limite si possono risolvere anche con una banale sostituzione, vi faccio vedere il primo e voi svolgete il quarto. Fate tesoro dei consigli e poi sperimentate, aprite gli occhi anche perchè per imparare non solo dovete ascoltare dagli altri quello che di buono vanno blaterando ma dovete mettere voi l'impegno e sperimentare sul campo.*

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln x - 1} =$ utilizzando la sostituzione $\ln x = t = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{t}{t - 1} = 1^-$. Ho detto 1^- perchè si conosce il grafico della funzione $g(t) = \frac{t}{t - 1}$, si tratta di una iperbole equilatera traslata o funzione omografica del tipo $g(t) = \frac{at + b}{ct + d}$, ha gli asintoti $t = 1$ e $g = 1$ e a suo tempo diciamo che è posizionata nel "Primo e Terzo quadrante" perchè ad $-cb < 0$. Svolgete il quarto limite sperimentando voi la sostituzione idonea.

Dai limiti in alto deduciamo che il grafico della funzione ha un asintoto verticale in $x = e$, mentre la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale destro. Il grafico di f non presenta ovviamente asintoti obliqui, quest'ultima osservazione è anche abbastanza superflua anche se non è sbagliato rimarcare; sappiamo che asintoti orizzontali e obliqui non possono per nessun motivo convivere!!! Attenzione possono esistere asintoti obliqui e orizzontali ma l'uno a $+\infty$ e l'altro a $-\infty$ o viceversa ma mai "dalla stessa parte" e con questa locuzione brutalissima ci siamo intesi, occhio!!!!

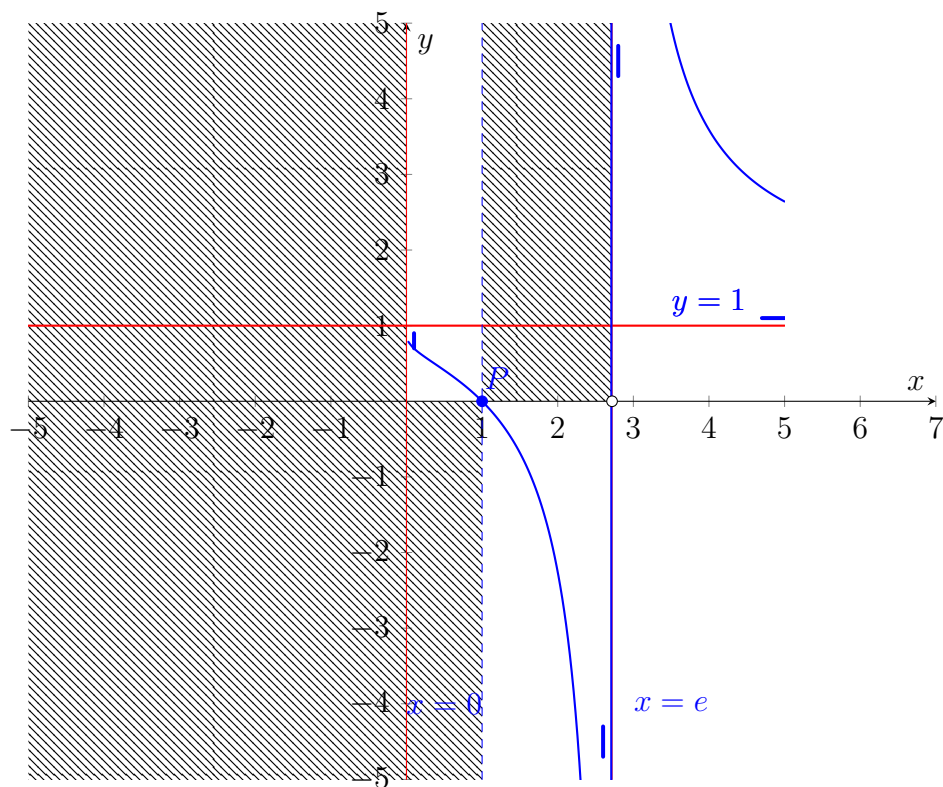


Figura 2: Dati parziali studio del grafico della funzione