

Esercizio 1. Studiare parzialmente il grafico della funzione $f(x) = \frac{2x^4}{x^3 - 8}$.

Osservazione 1. Con questa dicitura del parziale vogliamo intendere che noi facciamo uno studio parziale perché non abbiamo ancora sviluppato tutti gli elementi, tipo il calcolo differenziale, che contribuirà alla costruzione del grafico in modo chirurgico. Sul libro si parla di grafico probabile che potrebbe creare confusione pensando a qualcosa di incerto, ma in matematica l'incertezza non è di casa e io preferisco parlare di grafico parziale per il motivo che ho in precedenza precisato.

Svolgimento

1° Passo: Dominio

Il dominio X della funzione si trova imponendo la condizione $x^3 - 8 \neq 0$.

Concludiamo che $X = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

2° Passo: Proprietà di f

Poichè il dominio X non ha simmetria rispetto a 0 la funzione non può essere nè pari, nè dispari. La funzione evidentemente non è periodica.

Osservazione 2. Su questo punto vorrei fare una breve osservazione, in linea di massima non starei tanto a "ricamare" sulle non proprietà della funzione ma evidenzierei questo punto quando la funzione gode di qualche proprietà. Si lascia allo studente di decidere cosa fare a riguardo. In altre parole direi quando una funzione, ad esempio, è pari e non mi pronuncerei nel dire che una funzione non è pari. Così per il resto delle altre proprietà, spero di essere stato chiaro. Però se uno sa quello che dice è giusto evidenziare tutto, anche le non proprietà delle funzioni come in questo caso.

3° Passo: Studio del segno di f

$$\frac{2x^4}{x^3 - 8} \geq 0.$$

$N : 2x^4 \geq 0 \iff x \in \mathbb{R} - \{2\}$. Teniamo conto che in $x = 0$ la funzione si annulla.

$D : x^3 - 8 > 0 \iff x > 2$.

		0		2	
N	+	•	+		+
D	-		-	○	+
$\frac{N}{D}$	-		-		+

Possiamo concludere:

f positiva in $S_1 = (2, +\infty)$

f negativa in $S_2 = (-\infty, 0) \cup (0, 2)$

4° Passo: Intersezione con gli assi

Dal punto precedente si osserva che il grafico di f passa per l'origine del riferimento cartesiano $O \equiv (0, 0)$. Mi raccomando quando passa per l'origine non andate alla ricerca dell'intersezione dell'asse delle ordinate!!!! Passando per l'origine li interseca entrambi!!!

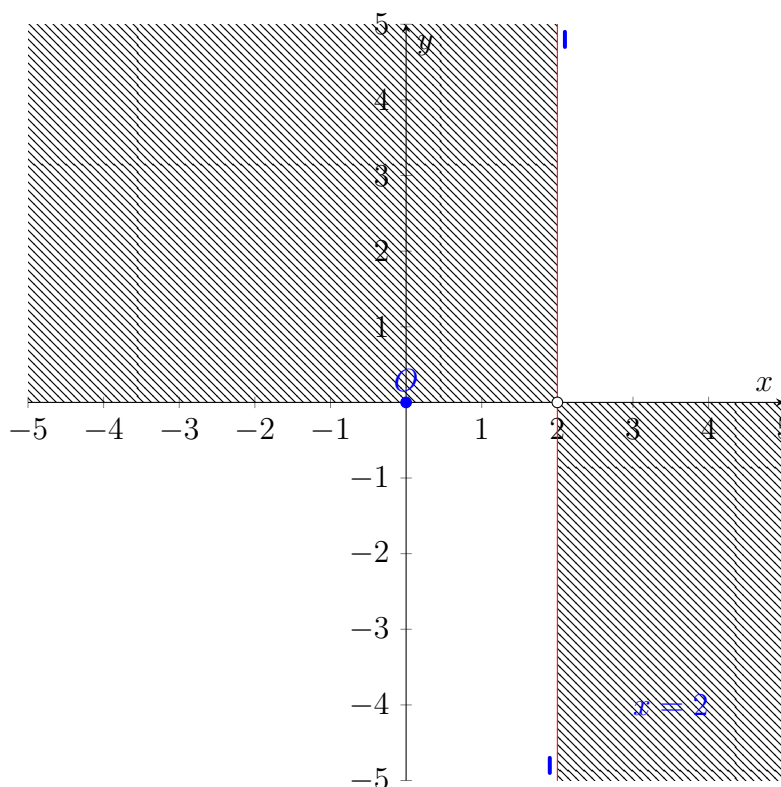


Figura 1: Dati parziali studio del grafico della funzione

5° Passo: limiti ai bordi del dominio

Riferendoci al dominio $X = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ calcoliamo i limiti ai bordi del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^4}{x^3 - 8}, \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^4}{x^3 - 8}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{x^3 - 8}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4}{x^3 - 8}.$$

Il primo limite $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^4}{x^3 - 8} = \frac{32}{0^-} = -\infty$. Che il limite diverge a $-\infty$ si può dedurre guardando in alto il grafico del segno della funzione a sinistra di 2. Ricordate che ogni volta che il numeratore è un numero diverso da 0 e il denominatore tende a 0 esiste una divergenza.

Il secondo limite $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^4}{x^3 - 8} = \frac{32}{0^+} = +\infty$. Che il limite diverge a $+\infty$ si può dedurre guardando in alto il grafico del segno della funzione a sinistra di 2. Ricordate che ogni volta che il numeratore è un numero diverso da 0 e il denominatore tende a 0 esiste una divergenza.

$$\text{Il terzo limite } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{x^3 - 8} = -\infty.$$

Il quarto limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4}{x^3 - 8} = +\infty$.

Dai primi due limiti in alto deduciamo che il grafico della funzione ha un asintoto verticale in $x = 2$. Il terzo e quarto limite escludono asintoti orizzontali ma potrebbero esserci asintoti obliqui, indaghiamo in tale direzione:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{x^4 - 8x} = 2 \iff m = 2.$$

$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{x^3 - 8} - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16x}{x^3 - 8} = 0 \implies q = 0$. Possiamo concludere che la retta $y = 2x$ è un asintoto obliquo sinistro. Allo stesso modo si trova che tale retta $y = 2x$ è anche un asintoto obliquo destro. E' sufficiente calcolare i due limiti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$ (vi invito a farlo!!!!)

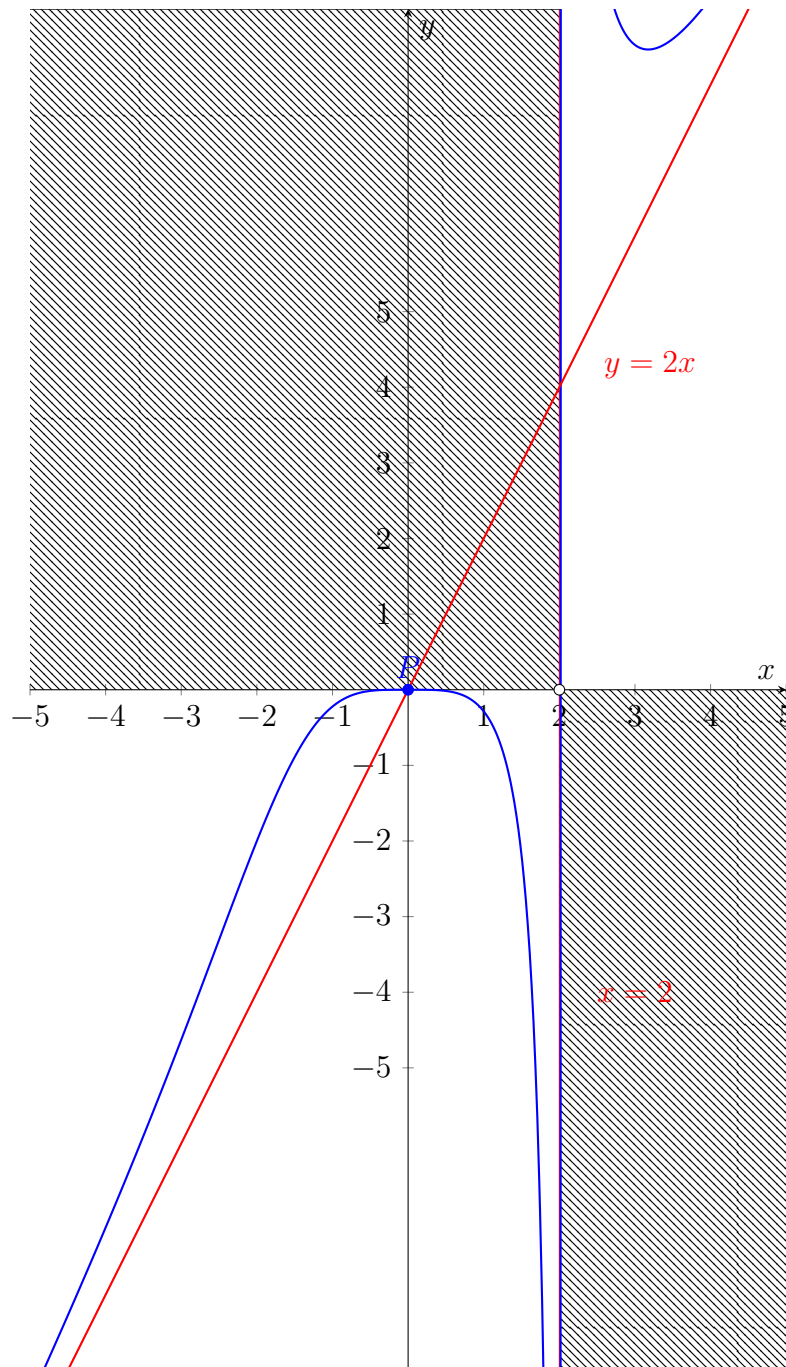


Figura 2: Dati parziali studio del grafico della funzione