

Esercizio 1. *Studiare parzialmente il grafico della funzione $f(x) = \ln \left| \frac{x^2 - 1}{5x} \right|$.*

Osservazione 1. *Con questa dicitura del parziale vogliamo intendere che noi facciamo uno studio parziale perché non abbiamo ancora sviluppato tutti gli elementi, tipo il calcolo differenziale, che contribuirà alla costruzione del grafico in modo chirurgico. Sul libro si parla di grafico probabile che potrebbe creare confusione pensando a qualcosa di incerto, ma in matematica l'incertezza non è di casa e io preferisco parlare di grafico parziale per il motivo che ho in precedenza precisato.*

Svolgimento

1° Passo: Dominio

Il dominio X della funzione si trova imponendo la condizione $5x \neq 0 \wedge x^2 - 1 \neq 0 \iff \iff x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1$. Concludiamo che $X = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

2° Passo: Proprietà di f

Osserviamo che la funzione è pari in quanto $f(-x) = \ln \left| \frac{x^2 - 1}{-5x} \right| = \left| -\frac{1}{5} \right| \cdot \left| \frac{x^2 - 1}{x} \right| = \left| \frac{x^2 - 1}{5x} \right| = f(x)$, notiamo anche che il dominio X è simmetrico rispetto a 0 e quindi tutto coerente. Sapere che la funzione è pari è importante perché noi faremo uno studio di essa in $X_1 = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ e poi il grafico costruito in X_1 lo riporteremo in $X_2 = (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ mediante una simmetria assiale rispetto all'asse delle ordinate.

Ripeto da questo momento in poi studieremo il tutto in $X_1 = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ e alla fine riassumeremo il tutto in X .

3° Passo: Studio del segno di f

Se $0 < x < 1$, allora $\ln \left| \frac{x^2 - 1}{5x} \right| \geq 0 \iff \frac{1 - x^2}{5x} \geq 1 \iff x^2 + 5x - 1 \leq 0 \iff 0 < x \leq \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$.

Se $x > 1$, allora $\ln \left| \frac{x^2 - 1}{5x} \right| \geq 0 \iff \frac{x^2 - 1}{5x} \geq 1 \iff x^2 - 5x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$.

Possiamo concludere:

f positiva in $\left(0, \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{29}}{2}, +\infty\right)$

f negativa in $\left(\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{5 + \sqrt{29}}{2}\right)$

4° Passo: Intersezione con gli assi

Dal punto precedente si osserva che il grafico di f interseca l'asse delle ascisse nel punto $P \equiv \left(\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, 0\right)$ e nel punto $Q \equiv \left(\frac{5 + \sqrt{29}}{2}, 0\right)$. Dal dominio X si intuisce che il grafico di f non interseca l'asse delle ordinate in quanto $0 \notin X$.

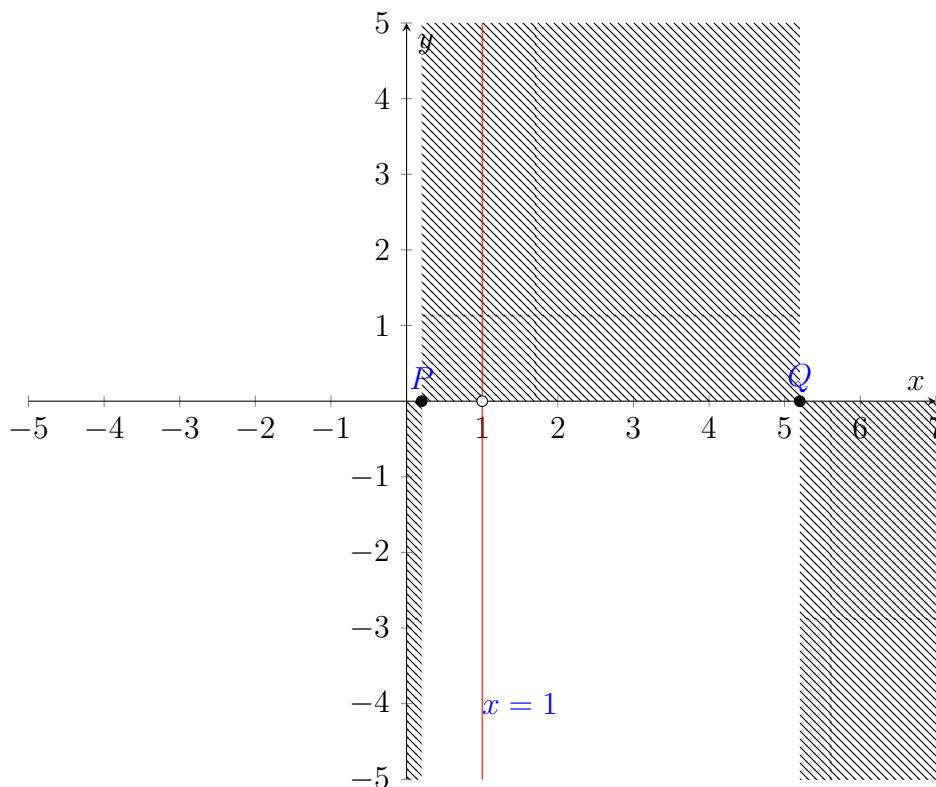


Figura 1: Dati parziali studio del grafico della funzione

5° Passo: limiti ai bordi del dominio

Ricordiamoci sempre che noi operiamo sempre in $X_1 = (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Questo è un bel risparmio di cose che una volta scoperte in X_1 riporteremo successivamente in $X_2 = (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

Ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left| \frac{x^2 - 1}{5x} \right|$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x^2 - 1}{5x} \right|$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left| \frac{x^2 - 1}{5x} \right| = \ln \frac{1}{0^+} = +\infty$ e quindi diciamo che $x = 0$ è un asintoto verticale destro.

$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \left| \frac{x^2 - 1}{5x} \right| = \ln \frac{0^+}{5} = -\infty$ e quindi diciamo che $x = 1$ è un asintoto verticale.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x^2 - 1}{5x} \right| = \ln(+\infty) = +\infty$. La funzione non ha asintoti orizzontali destri ma potrebbe avere un asintoto obliquo destro in quanto ci sta una divergenza a $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left| \frac{x^2 - 1}{5x} \right|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x^2 - 1}{5x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x^2 - 1)}{x} - \frac{\ln 5x}{x} \right] = 0 + 0 = 0.$$

Questo vuol dire che il grafico di f non ammette asintoti obliqui. Vogliamo però dimostrare che i due limiti valgono 0. Ricordiamo che a lezione abbiamo già dimostrato che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = 0^+$.

Iniziamo con il dimostrare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$, è sufficiente utilizzare la sostituzione $x = e^t$, allora abbiamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^t}{t}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$.

In forma compatta $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$. Vediamo ora ai limiti in questione:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \right]}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x^2}{x} + \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)}{x} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)}{x} \right] = 2 \cdot 0 + \frac{\ln 1}{+\infty} = 0 + \frac{0}{+\infty} = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln 5}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0 + 0 = 0.$$

Possiamo riassumere i risultati in $X = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ da quelli ottenuti in $X_1 = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

f positiva in $\left(-\infty, \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{5 - \sqrt{29}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{29}}{2}, +\infty\right)$.

f negativa in $\left(\frac{-5 - \sqrt{29}}{2}, -1\right) \cup \left(-1, \frac{5 - \sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{5 + \sqrt{29}}{2}\right)$.

Le intersezioni con gli assi: $P \equiv \left(\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, 0\right)$, $Q \equiv \left(\frac{5 + \sqrt{29}}{2}, 0\right)$, $P' \equiv \left(\frac{5 - \sqrt{29}}{2}, 0\right)$ e $Q' \equiv \left(\frac{-5 - \sqrt{29}}{2}, 0\right)$.

I limiti ai bordi del dominio: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \left| \frac{x^2 - 1}{5x} \right| = \ln \frac{1}{0^-} = +\infty$ e quindi diciamo che $x = 0$ è un asintoto verticale. $\lim_{x \rightarrow -1} \ln \left| \frac{x^2 - 1}{5x} \right| = \ln \frac{0^+}{5} = -\infty$ e quindi diciamo che $x = -1$ è un asintoto verticale.

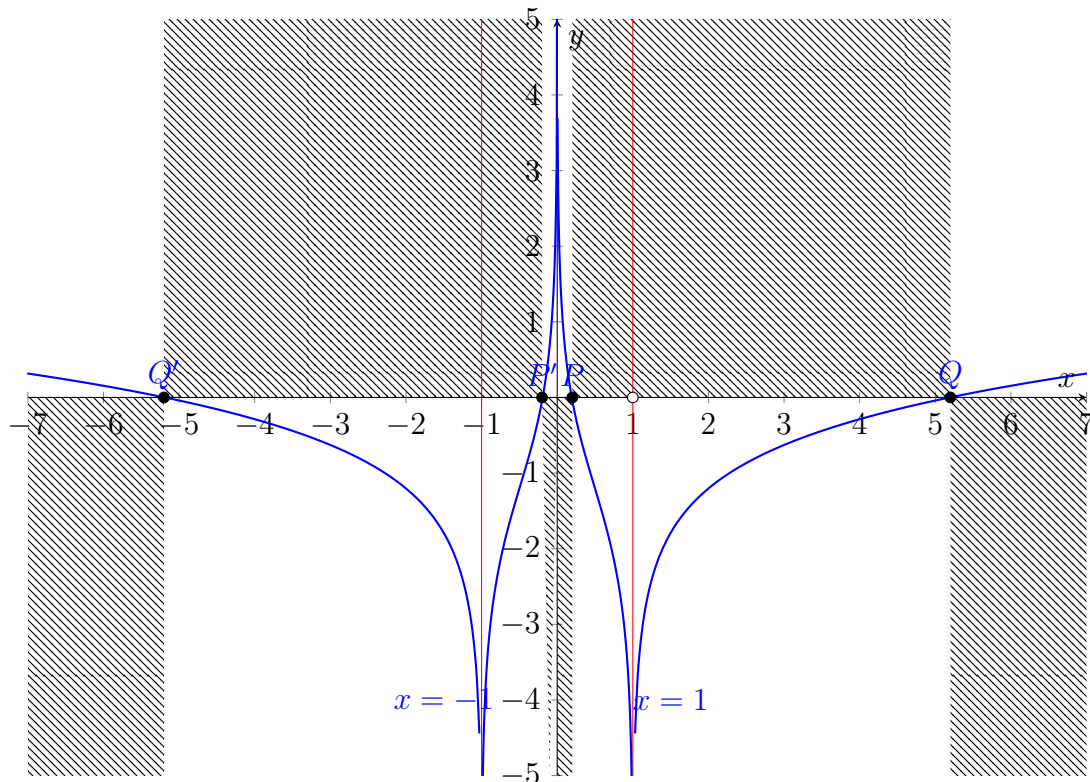


Figura 2: Dati parziali studio del grafico della funzione