

Pillola sul concetto di limite

Liceo Assteas -Buccino-

F. FERNICOLA

30 Ottobre 2025

Osservazione 1 *Inutile stare a dire che stiamo per familiarizzare con una nozione importante dell'analisi matematica ovvero il concetto di limite.*

Il setting è il seguente: $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 è un punto di accumulazione per X dominio di f . Nel futuro vedremo spesso la seguente scrittura, la mettiamo in posizione centrale:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$x_0 \rightarrow \begin{cases} -\infty \\ \text{finito e quindi un numero} \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{cases} \quad l \rightarrow \begin{cases} -\infty \\ \text{finito e quindi un numero} \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ \text{non esiste} \end{cases}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \nexists$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \nexists$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{l) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \nexists$$

Osservazione 2 *Queste sono le 12 scritture di base, poi ci sarebbero le varianti di x_0 dalla destra o sinistra e le varianti di l dalla destra o sinistra e se ne aggiungono altre 14 e le scrivo nella successiva riga.*

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l^- \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l^+ \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l^- \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l^+$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l^- \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l^+ \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \quad \text{j) } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \quad \text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^- \quad \text{l) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^+$$

$$\text{m) } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \nexists \quad \text{n) } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \nexists$$

Osservazione 3 *Quelle in alto sono solo le scritture simboliche, ma se guardate sul libro per ognuna di esse si deve scrivere la definizione utilizzando gli intorni di x_0 e gli intorni di l . Un essere normale può imparare tutte queste definizioni a memoria? Per nulla, se mi seguite vi svelo il trucco per scrivere con semplicità disarmante ciascuna delle definizioni riportate. Ma soprattutto comprenderle nella loro natura più profonda.*

Preparazione alla definizione di limite

$f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in D(X)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Madre $\forall I(l), \exists I(x_0) \mid \forall x \in (I(x_0) \cap X) - \{x_0\} \implies f(x) \in I(l).$

Soffermiamoci su $x_0 \in D(X)$ ($D(X)$ è il *derivato di X* e indica l'insieme dei punti di accumulazione di X).

- a) Prendere un intorno di $-\infty$, $I(-\infty)$ equivale a prendere $N \in \mathbb{R} \wedge N > 0$ e $(-\infty, -N)$.
- b) Prendere un intorno sinistro di x_0 , $I^-(x_0)$ equivale a prendere $\delta \in \mathbb{R} \wedge \delta > 0$ e $(x_0 - \delta, x_0)$.
- c) Prendere un intorno destro di x_0 , $I^+(x_0)$ equivale a prendere $\delta \in \mathbb{R} \wedge \delta > 0$ e $(x_0, x_0 + \delta)$.
- d) Prendere un intorno di x_0 , $I(x_0)$ equivale a prendere $\delta \in \mathbb{R} \wedge \delta > 0$ e $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
- e) Prendere un intorno di $+\infty$, $I(+\infty)$ equivale a prendere $N \in \mathbb{R} \wedge N > 0$ e $(N, +\infty)$.

Soffermiamoci su l .

- a) Prendere un intorno di $-\infty$, $I(-\infty)$ equivale a prendere $M \in \mathbb{R} \wedge M > 0$ e $(-\infty, -M)$.
- b) Prendere un intorno sinistro di l , $I^-(l)$ equivale a prendere $\epsilon \in \mathbb{R} \wedge \epsilon > 0$ e $(l - \epsilon, l)$.
- c) Prendere un intorno destro di l , $I^+(l)$ equivale a prendere $\epsilon \in \mathbb{R} \wedge \epsilon > 0$ e $(l, l + \epsilon)$.
- d) Prendere un intorno di l , $I(l)$ equivale a prendere $\epsilon \in \mathbb{R} \wedge \epsilon > 0$ e $(l - \epsilon, l + \epsilon)$.
- e) Prendere un intorno di $+\infty$, $I(+\infty)$ equivale a prendere $M \in \mathbb{R} \wedge M > 0$ e $(M, +\infty)$.

Vediamo come si utilizza la madre sui figli.

Madre $\forall I(l), \exists I(x_0) \mid \forall x \in (I(x_0) \cap X) - \{x_0\} \implies f(x) \in I(l).$

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. Siamo nel caso x_0 finito e l finito.

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R} \wedge \delta > 0 \mid \forall x \in (I_\delta(x_0) \cap X) - \{x_0\} \implies |f(x) - l| < \epsilon$. Anche più snella quando è chiaro che ϵ, δ, M, N sono numeri reali.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \forall x \in (I_\delta(x_0) \cap X) - \{x_0\} \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Siamo nel caso $x_0 = +\infty$ e $l = +\infty$.

$$\forall M > 0 \exists N > 0 \mid \forall x \in X \wedge x > N \implies f(x) > M.$$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$. Siamo nel caso $x_0 = -\infty$ e l finito.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0 \mid \forall x \in X \wedge x < -N \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$. Siamo nel caso x_0 finito e $l = -\infty$.

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid \forall x \in (I_\delta^+(x_0) \cap X) - \{x_0\} \implies f(x) < -M.$$

Osserviamo che in questo caso quel $-\{x_0\}$ è inutile perché $x_0 \notin I_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$ e quindi se anche appartenesse a X non potrebbe essere nell'intersezione in quanto come già detto $x_0 \notin I_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$. Dunque la definizione può essere data nel seguente modo:

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid \forall x \in (I_\delta^+(x_0) \cap X) \implies f(x) < -M.$$

Riflettete bene quando scrivete le definizioni.

Esercizio 1 *Fatemi felice, prendete un figlio e sottoponetelo alla legge della madre. Fatemi contento, vanno bene anche più figli! I figli che giocano con la madre. Fateli giocare tutti i bambini che saranno felici!*