

Pillola sul calcolo dei limiti di funzioni

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fericola

1 Dicembre 2025

Osservazione 1 *Uno studente deve sapere che, in linea di massima, il calcolo di un limite in $x_0 \in \widehat{\mathbf{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ può essere sempre ricondotto a 0 o a $+\infty$ e questo lo vedrete soprattutto in corsi universitari.*

Questo perché se viene assegnato il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ è sufficiente il cambio di variabile $x - x_0 = t$ e quindi il limite diventa $\lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$. Se abbiamo $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ è sufficiente il cambio di variabile $x = -t$ e quindi il limite diventa $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(-t)$. Allo stesso modo se abbiamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ lo possiamo "riportare in 0" utilizzando la sostituzione $x = \frac{1}{t}$ e quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Vediamo che le cose funzionano facendo anche alcuni esempi, vi preannuncio anche che questa sostituzione non comporta sempre dei grossi vantaggi e lo capirete da soli, in alcuni casi però molti limiti nebulosi possono essere scritti in maniera "più chiara e docile."

Esempio 1 *Vogliamo calcolare il $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 9} - x + 3}{x^2 - 5x + 6}$.*

Evidentemente il limite si presenta in forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Osserviamo che $f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x-3)(x+3)} - (x-3)}{(x-3)(x+2)}$, optiamo per la sostituzione $x - 3 = t \implies$

$\implies x + 3 = t + 6 \vee x - 2 = t + 1$, allora il limite diventa $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^2 + 6t} - t}{t^2 + t}$ e quindi forse meno

nebuloso; è anche chiaro che la sola sostituzione non cambia il limite e la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ resta come si può ben notare; l'ultima scrittura però ci permette una manipolazione più comoda

in quanto $\frac{\sqrt[3]{t^2 + 6t} - t}{t^2 + t} = \frac{t \left(\sqrt[3]{\frac{t^2 + 6t}{t^3}} - 1 \right)}{t(t+1)} = \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{t+6}{t^2}} - 1 \right)}{t+1}$ e quindi in definitiva possiamo scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 9} - x + 3}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^2 + 6t} - t}{t^2 + t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{t+6}{t^2}} - 1 \right)}{t+1} = \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{6}{0^+}} - 1 \right)}{1} = \frac{+\infty - 1}{1} = +\infty$$

Osservazione 2 *Diciamo che un occhio esperto poteva anche seguire altre strade, il mio intento era mostrare che i limiti si possono portare in 0 e farvi vedere come si ragiona quando si calcola un limite con il metodo di sostituzione.*

Esempio 2 Vogliamo calcolare il $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9x^2 + x - 1} + 3x$.

Evidentemente il limite si presenta in forma indeterminata $+\infty - \infty$. Il leggero torpore che mi crea è quello ad esempio che se volessi portare fuori dalla radice $9x^2$ dovrei scrivere $-3x$. Optiamo per la sostituzione $x = -t$, allora il limite diventa $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{9t^2 - t - 1} - 3t$, la forma indeterminata resta sempre, ora con una semplice razionalizzazione si porta il limite a casa.

$$\begin{aligned} \sqrt{9t^2 - t - 1} - 3t &= \frac{(\sqrt{9t^2 - t - 1} - 3t)(\sqrt{9t^2 - t - 1} + 3t)}{\sqrt{9t^2 - t - 1} + 3t} = \frac{9t^2 - t - 1 - 9t^2}{3t\sqrt{1 - \frac{1}{9t} - \frac{1}{9t^2}} + 3t} = \\ &= \frac{t\left(-1 - \frac{1}{t}\right)}{3t\left(\sqrt{1 - \frac{1}{9t} - \frac{1}{9t^2}} + 1\right)}, \text{ allora possiamo concludere che } \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{9t^2 - t - 1} - 3t = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t\left(-1 - \frac{1}{t}\right)}{3t\left(\sqrt{1 - \frac{1}{9t} - \frac{1}{9t^2}} + 1\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)}{2} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$