

Nozioni di base di Analisi Matematica

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola

13 Ottobre 2025

1 Alcune funzioni elementari

Noi ci occuperemo di *funzioni reali di variabile reale*, una tale funzione la indicheremo nel seguente modo: $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$. Il termine *funzione reale* vuol dire che il CODOMINIO sarà sempre l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, *di variabile reale* vuol dire che il DOMINIO sarà un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$. Una tale *funzione* verrà indicata da una relazione $f(x)$ e generalmente si scrive $y = f(x)$ dicendo che x è variabile indipendente e $f(x)$ o y è la variabile dipendente.

Esempio 1 La funzione costante

$$f: X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = k$$

$$\text{DOMINIO: } X = \mathbb{R} \text{ e IMMAGINE: } f(X) = \{k\}$$

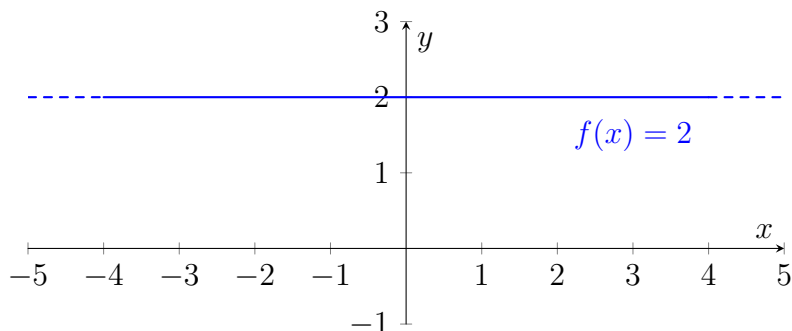


Figura 1: Il grafico della funzione costante $f(x) = 2$

Esempio 2 La funzione affine

$$f: X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = ax + b \text{ con } a \neq 0$$

$$\text{DOMINIO: } X = \mathbb{R} \text{ e IMMAGINE: } f(X) = \mathbb{R}$$

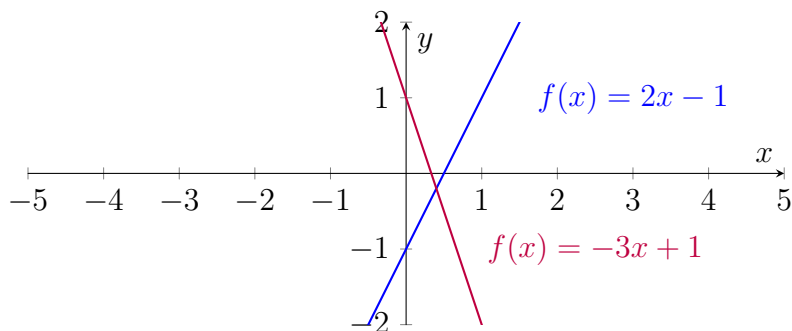


Figura 2: I grafici di due funzioni affini

Esempio 3 La funzione quadratica

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = x^2$$

DOMINIO: $X = \mathbb{R}$ e *IMMAGINE:* $f(X) = [0, +\infty)$

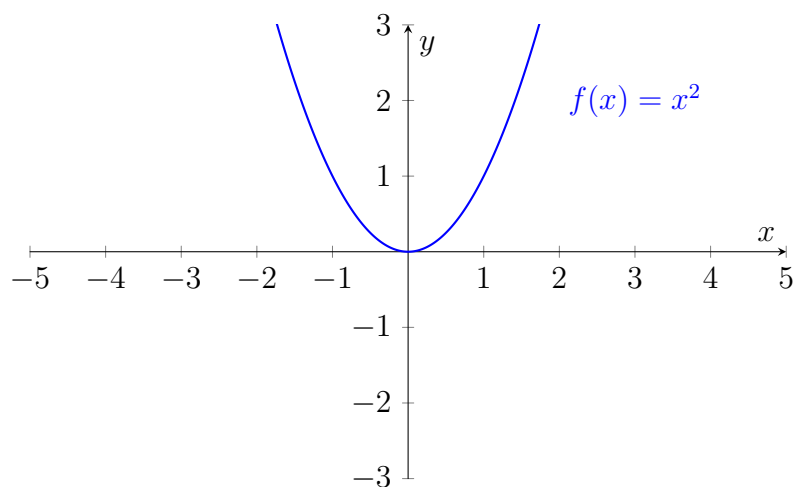


Figura 3: Il grafico della funzione quadratica

Esempio 4 La funzione radice quadrata

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = \sqrt{x}$$

DOMINIO: $X = [0, +\infty)$ e *IMMAGINE:* $f(X) = [0, +\infty)$

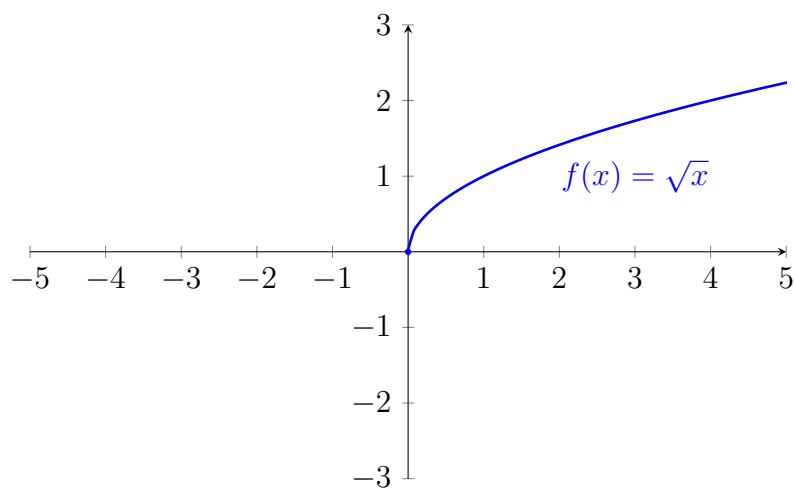


Figura 4: Il grafico della funzione radice quadrata

Esempio 5 La funzione cubica

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = x^3$$

DOMINIO: $X = \mathbb{R}$ e *IMMAGINE:* $f(X) = \mathbb{R}$

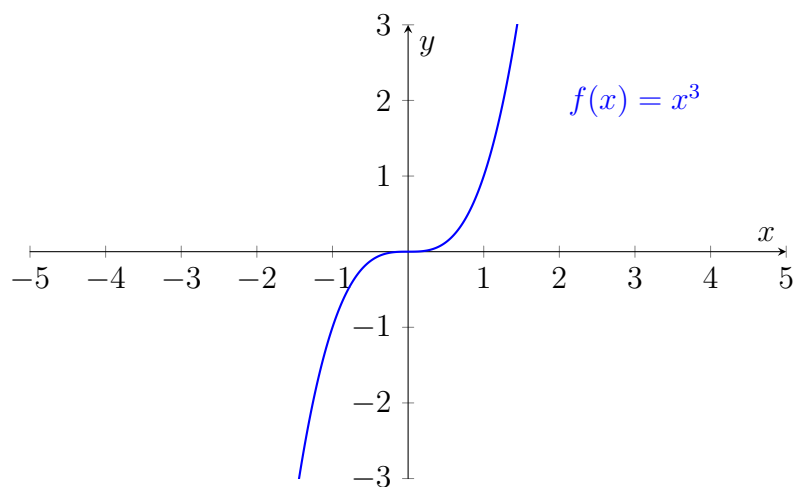


Figura 5: Il grafico della funzione cubica

Esempio 6 La funzione inversa della funzione cubica

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = \sqrt[3]{x}$$

DOMINIO: $X = \mathbb{R}$ e *IMMAGINE:* $f(X) = \mathbb{R}$

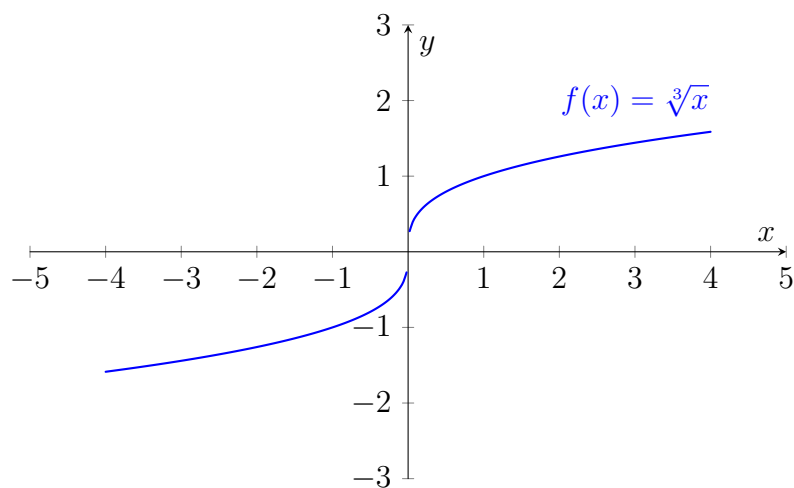


Figura 6: Il grafico della funzione inversa della funzione cubica

Esempio 7 La *funzione reciproca della funzione identica*

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = \frac{1}{x}$$

DOMINIO: $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e *IMMAGINE*: $f(X) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

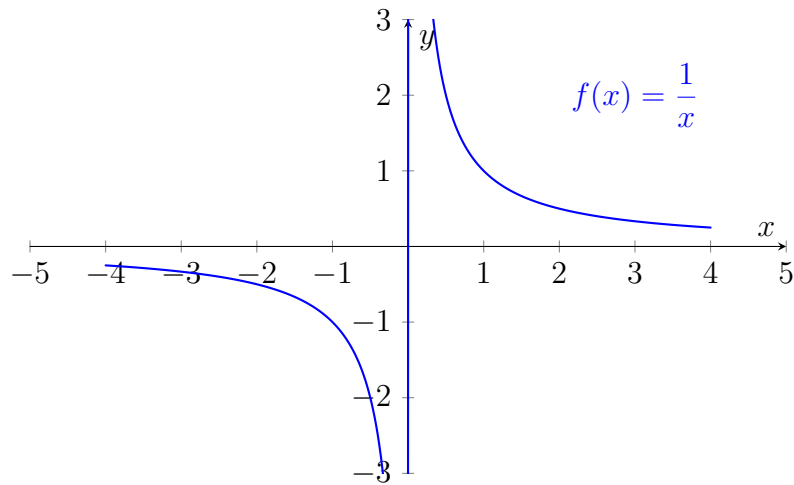


Figura 7: Il grafico della funzione reciproca della funzione identica

Esempio 8 La *funzione valore assoluto*

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = |x|$$

DOMINIO: $X = \mathbb{R}$ e *IMMAGINE*: $f(X) = [0, +\infty)$

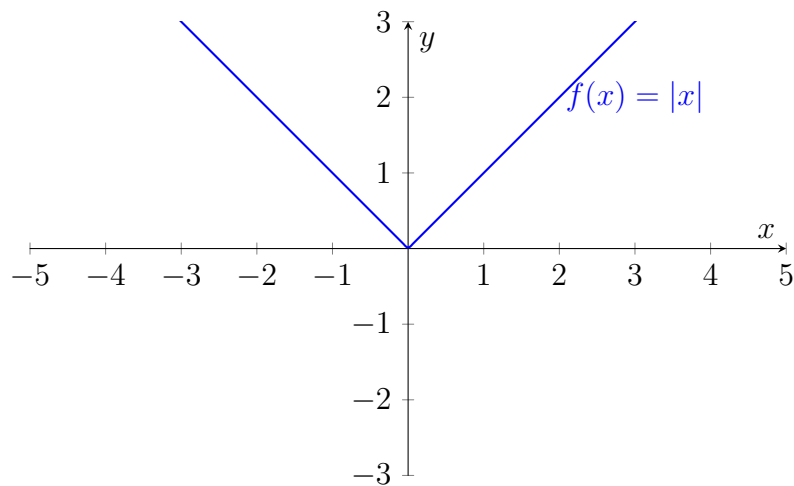


Figura 8: Il grafico della funzione valore assoluto

Esempio 9 La *funzione reciproca della funzione quadratica*

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

DOMINIO: $X = \mathbb{R} - 0$ e *IMMAGINE*: $f(X) = (0, +\infty)$

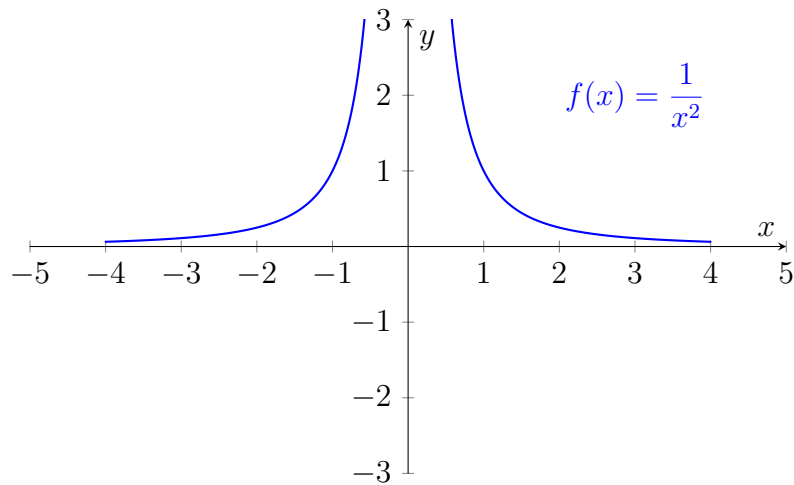


Figura 9: Il grafico della funzione reciproca della funzione quadratica

Esempio 10 La *funzione reciproca della funzione cubica*

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = \frac{1}{x^3}$$

DOMINIO: $X = \mathbb{R} - \{0\}$ e *IMMAGINE*: $f(X) = \mathbb{R} - \{0\}$

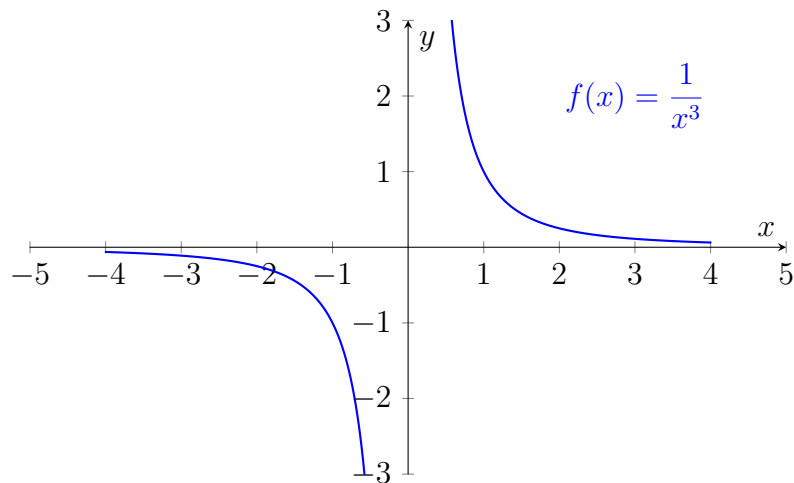


Figura 10: Il grafico della funzione reciproca della funzione cubica

Esempio 11 La funzione esponenziale

$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$

DOMINIO: $X = \mathbb{R}$ e *IMMAGINE*: $f(X) = (0, +\infty)$

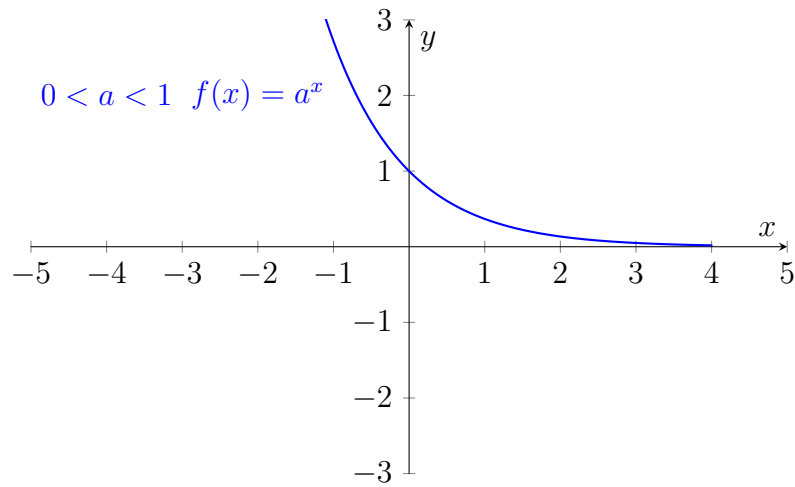


Figura 11: Grafico della funzione esponenziale con base $0 < a < 1$

Esempio 12 La funzione esponenziale

$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = a^x$ con $a > 1$

DOMINIO: $X = \mathbb{R}$ e *IMMAGINE*: $f(X) = (0, +\infty)$

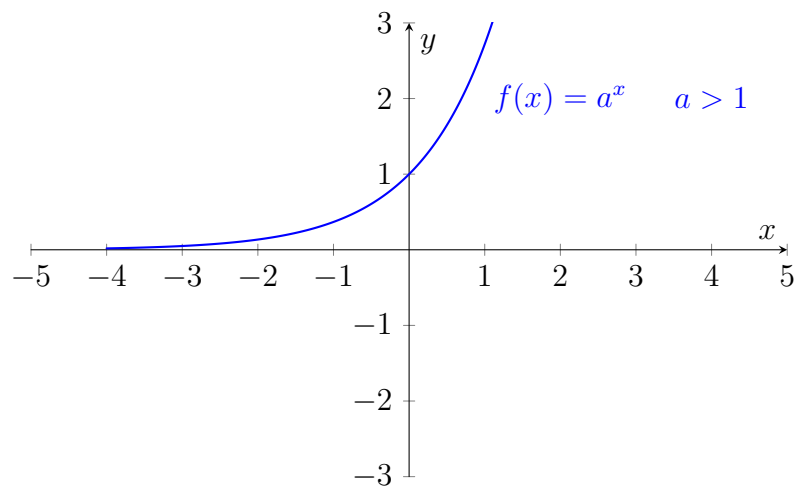


Figura 12: Grafico della funzione esponenziale con base $a > 1$

Esempio 13 La funzione logaritmica

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = \log_a x$$

DOMINIO: $X = (0, +\infty)$ e *IMMAGINE:* $f(X) = \mathbb{R}$

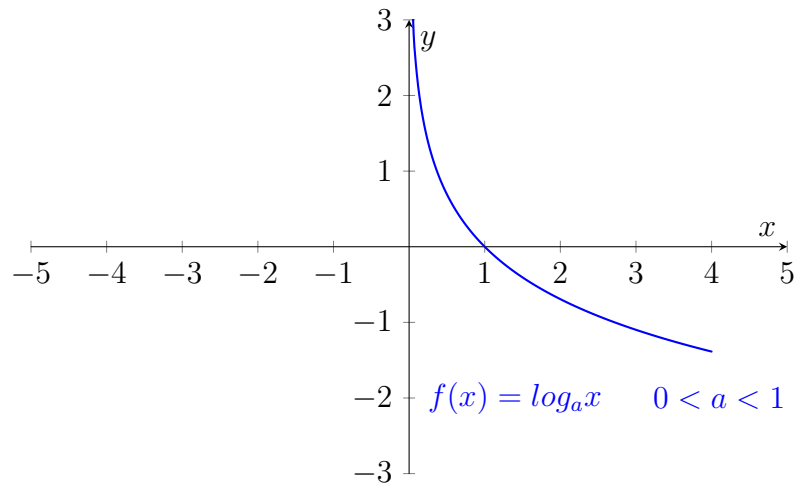


Figura 13: Grafico della funzione logaritmica con base $0 < a < 1$

Esempio 14 La funzione logaritmica

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = \log_a x$$

DOMINIO: $X = (0, +\infty)$ e *IMMAGINE:* $f(X) = \mathbb{R}$

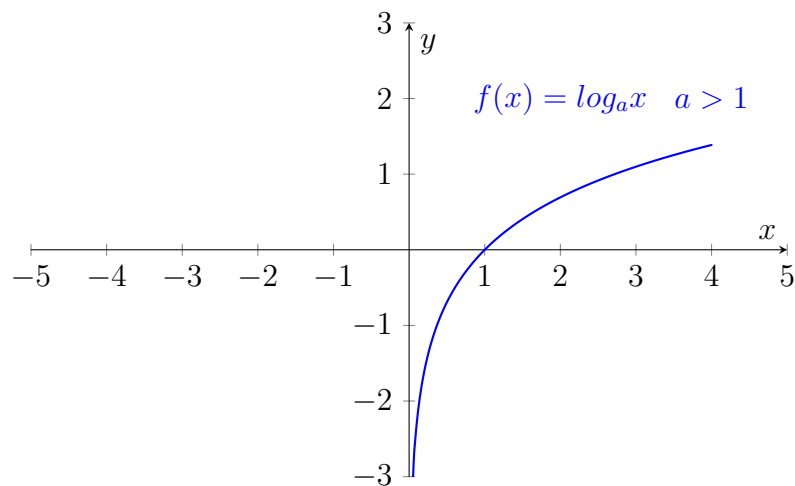


Figura 14: Grafico della funzione logaritmica con base $a > 1$

Esempio 15 La *funzione seno*

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = \sin(x)$$

DOMINIO: $X = \mathbb{R}$ e *IMMAGINE*: $f(X) = [-1, 1]$

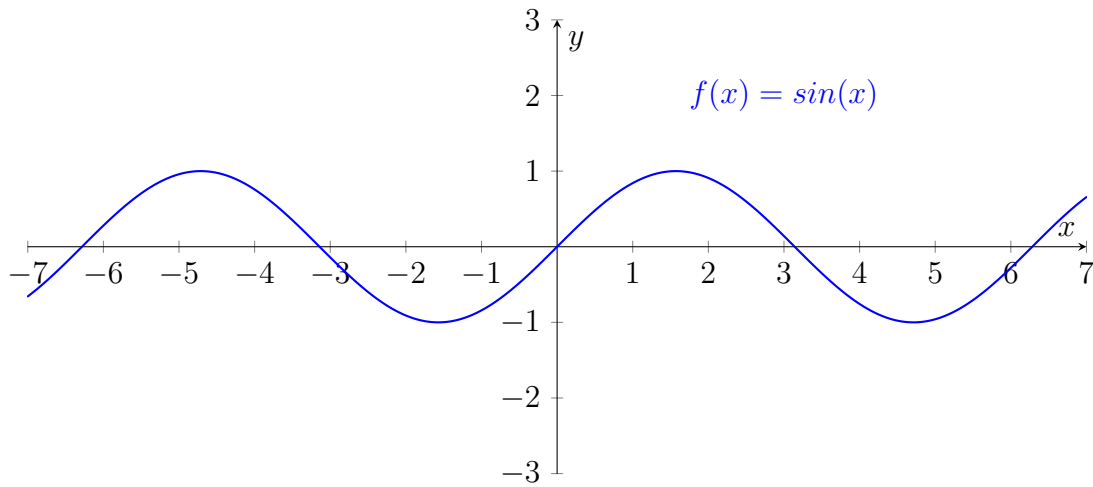


Figura 15: Il grafico della funzione seno o senoide

Esempio 16 La *funzione arcoseno*

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ con } f(x) = \arcsin(x)$$

DOMINIO: $X = [-1, 1]$ e *immagine* $f(X) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

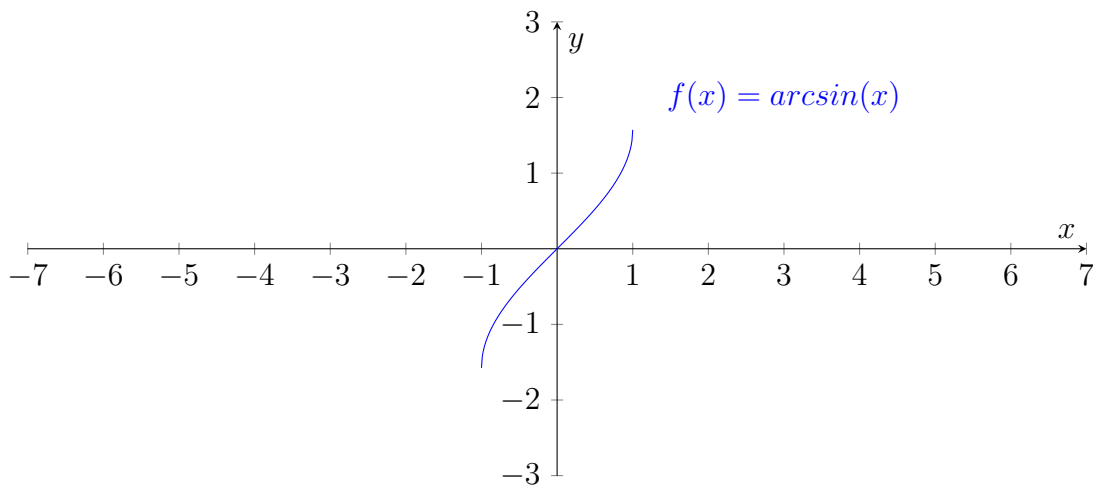


Figura 16: Il grafico della funzione arcoseno

Esempio 17 *La funzione coseno*

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = \cos(x)$$

DOMINIO: $X = \mathbb{R}$ e *IMMAGINE:* $f(X) = [-1, 1]$

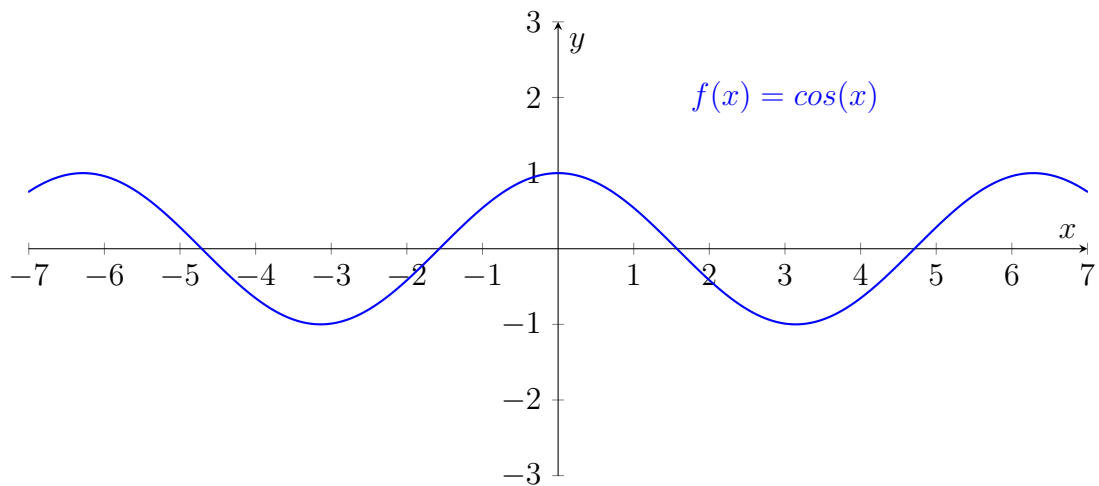


Figura 17: Il grafico della funzione coseno o cosinusoidale

Esempio 18 *La funzione arcocoseno*

$$f : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \text{ con } f(x) = \arccos(x)$$

DOMINIO: $X = [-1, 1]$ e *IMMAGINE:* $f(X) = [0, \pi]$

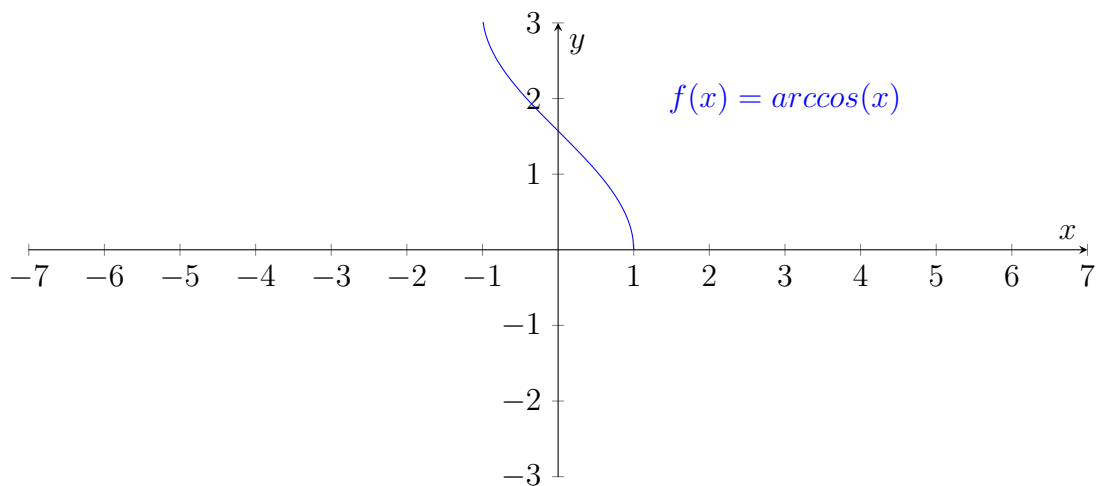


Figura 18: Il grafico della funzione arcocoseno

Esempio 19 *La funzione tangente*

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = tg(x)$$

$$\text{DOMINIO: } X = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ e IMMAGINE: } f(X) = \mathbb{R}$$

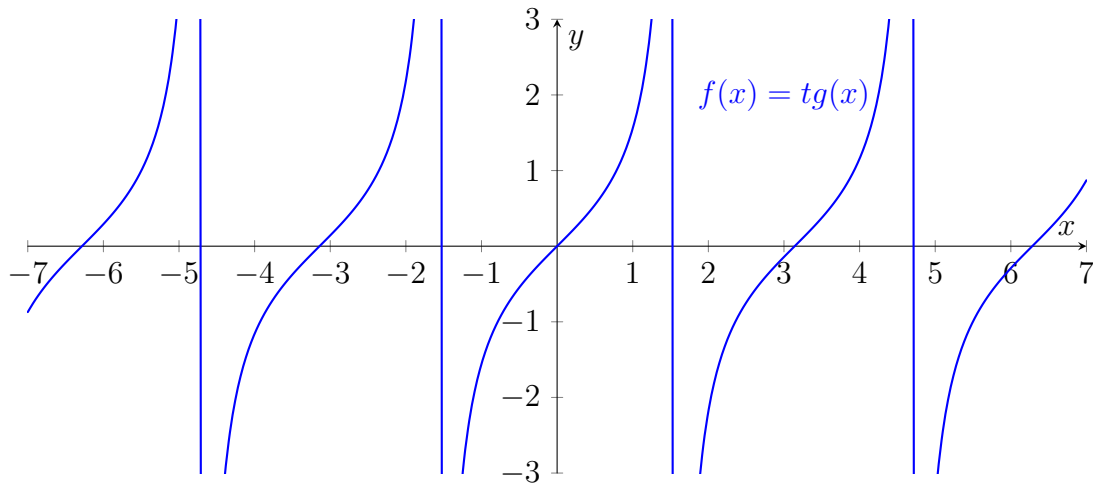


Figura 19: Il grafico della funzione tangente o tangente

Esempio 20 *La funzione arcotangente*

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = arctg(x)$$

$$\text{DOMINIO: } X = (-\infty, \infty) \text{ e IMMAGINE: } f(X) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

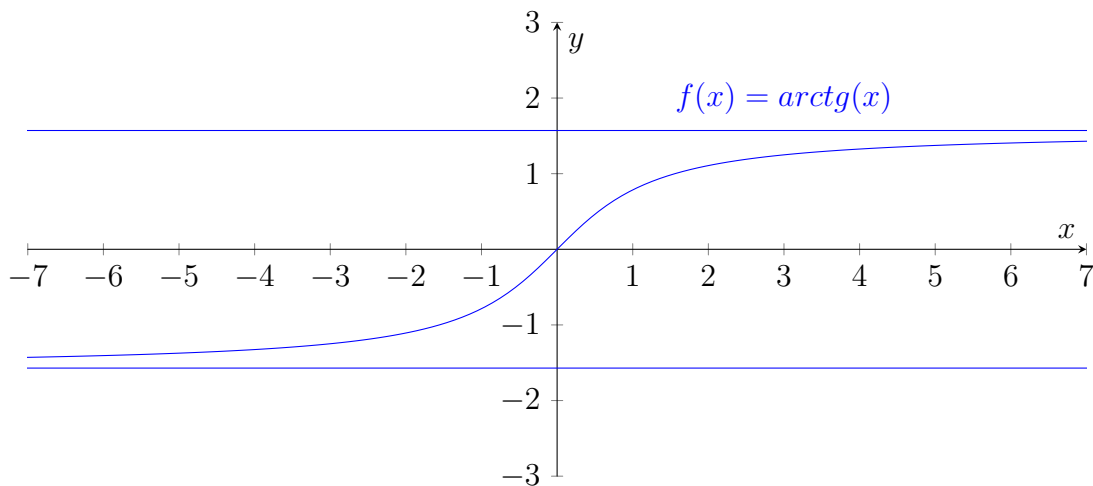


Figura 20: Il grafico della funzione arcotangente

Esempio 21 La *funzione cotangente*

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = \operatorname{ctg}(x)$$

DOMINIO: $X = \mathbb{R} - \{k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ e *IMMAGINE*: $f(X) = \mathbb{R}$

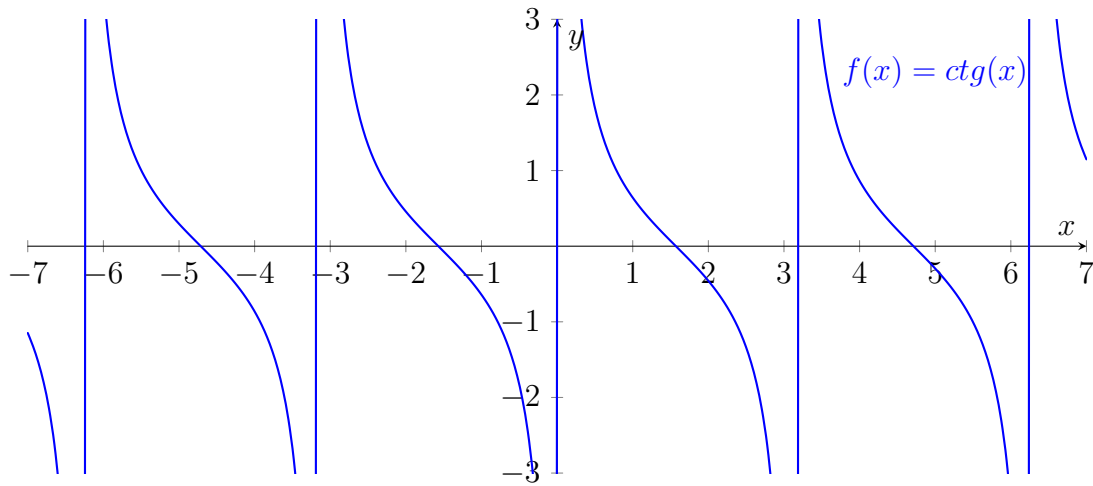


Figura 21: Il grafico della funzione cotangente o cotangente

Esempio 22 La *funzione arcocotangente*

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f(x) = \operatorname{arccotg}(x)$$

DOMINIO: $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e *IMMAGINE*: $f(X) = (0, \pi)$

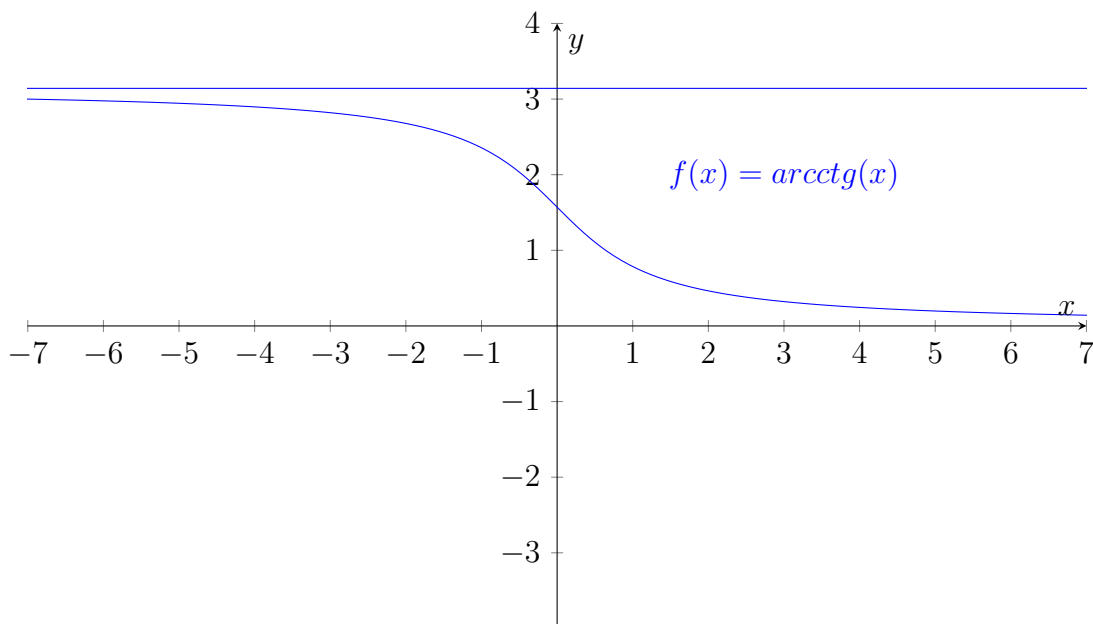


Figura 22: Il grafico della funzione arcocotangente

2 Segno di una funzione

Supponiamo di avere una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $A \subseteq X$.

Definizione 1 Diremo che la funzione f è non negativa in A se $\forall x \in A$ si ha che $f(x) \geq 0$. Diremo che la funzione f è positiva in A se $\forall x \in A$ si ha che $f(x) > 0$.

Se ricordiamo come è fatta la funzione $f(x) = x^2$ possiamo dire che essa è non negativa in $A = \mathbb{R}$, insomma è una funzione non negativa nel suo dominio $\mathbb{R}$. La stessa funzione $f(x) = x^2$ è positiva in $A = [3, 8]$. Il grafico di una funzione non negativa o si trova sull'asse delle x o sta al di sopra dell'asse delle x . La funzione $f(x) = 0$ che corrisponde all'asse delle x è una funzione non negativa e tutti i punti del grafico sono sull'asse delle x . Una funzione positiva ha un grafico che si trova al di sopra dell'asse delle x , un altro esempio è la funzione $f(x) = 2^x$ che è positiva in $A = \mathbb{R}$.

Definizione 2 Diremo che la funzione f è non positiva in A se $\forall x \in A$ si ha che $f(x) \leq 0$. Diremo che la funzione f è negativa in A se $\forall x \in A$ si ha che $f(x) < 0$.

Se ricordiamo come è fatta la funzione $f(x) = x^3$ possiamo dire che essa è non positiva in $A = (-\infty, 0]$. La stessa funzione $f(x) = x^3$ è negativa in $A = [-5, -2]$. Il grafico di una funzione non positiva o si trova sull'asse delle x o sta al di sotto dell'asse delle x . La funzione $f(x) = 0$ che corrisponde all'asse delle x è una funzione non positiva e tutti i punti del grafico sono sull'asse delle x . Una funzione negativa ha un grafico che si trova al di sotto dell'asse delle x , un altro esempio è la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ che è negativa in $A = (-\infty, 0)$.

Osservazione 1 Le locuzioni "al sopra", "al di sotto" o "sopra" sono efficaci perchè espressive ma vanno utilizzate con cautela. Poi non ha senso parlare di funzione positiva, negativa, non positiva, non negativa se non si specifica rispetto a quale sottoinsieme $A \subseteq X$. Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è positiva in $A = (0, +\infty)$ ma è negativa in $B = (-\infty, 0)$.

Definizione 3 Diremo che la funzione f ha uno zero in $x_0 \in X$ se $f(x_0) = 0$. Insomma gli zeri di una funzione f sono le ascisse dei punti di intersezione tra il grafico della funzione e l'asse delle x .

Osserviamo che una funzione f potrebbe non avere zeri. La funzione $f(x) = x^2 + 4$ non ha zeri. Una funzione potrebbe avere anche infiniti zeri e questo è il caso di $f(x) = \sin x$ con zeri tutti i numeri reali del tipo $x_0 = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Il mondo è variegato e può accadere di tutto. Nello studiare il grafico di una funzione (nostro obiettivo) ci imbattemmo nel calcolo degli zeri di una funzione che poi in sostanza ci serve per comprendere dove il grafico della funzione "taglia" o "interseca" l'asse delle x . Invece per sapere dove una funzione "taglia" l'asse delle ordinate y è sufficiente calcolare $f(0)$ quando $0 \in X$ (lo 0 potrebbe non appartenere al dominio X della funzione!!!). Ad esempio la funzione $f(x) = x^2 - 1$ attraversa l'asse delle ordinate y nel punto $P \equiv (0, -1)$ perchè $f(0) = -1$. Per la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$ non si pone proprio questo problema in quanto $0 \notin X$ e quindi come potete constatare il grafico della *funzione reciproca della funzione quadratica* non "interseca" l'asse delle y .

Osservazione 2 Voglio osservare che taluni autori utilizzano il termine *negativa* come sinonimo di non positiva e la locuzione *strettamente negativa* come sinonimo di negativa, il termine *positiva* come sinonimo di non negativa e la locuzione *strettamente positiva* come sinonimo di positiva. Fate attenzione quando leggete nei vari testi! Attenzione che tali locuzioni sono fortemente legate all'insieme $A \subseteq X$ a cui si riferisce. Per esempio la funzione $f(x) = x^3$ è positiva in $A = [2, 5]$ e di certo essa è negativa in $A = [-7, -3]$.

3 Alcune proprietà delle funzioni

Supponiamo di avere una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Definizione 4 Diremo che la funzione f è *pari* nel suo dominio X se $\forall x \in X$, accade che $-x \in X$ ed è verificata la seguente relazione: $f(x) = f(-x)$.

Tra le funzioni elementari come esempio di funzione pari possiamo considerare $f(x) = x^2$, infatti noi sappiamo che $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ e la definizione di funzione pari è verificata. Un altro esempio di funzione pari è la funzione $f(x) = \cos x$ (provate a verificarlo!). Osserviamo che il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Osserviamo che una funzione per essere *pari* deve avere dominio X simmetrico rispetto a 0, insomma se $x_0 \in X \implies -x_0 \in X$. Se una funzione non ha dominio simmetrico rispetto a 0 non può essere *pari*. Nel prossimo esempio vediamo il grafico di una funzione pari:

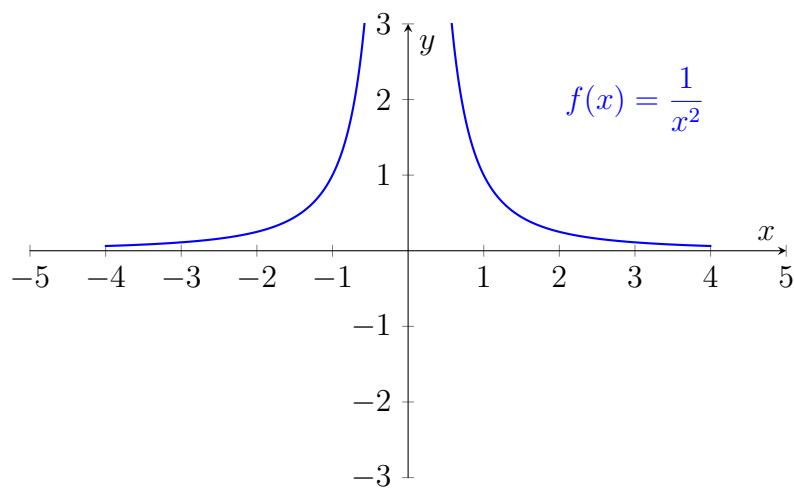


Figura 23: Il grafico della funzione reciproca della funzione quadratica, funzione pari.

Definizione 5 Diremo che la funzione f è *dispari* nel suo dominio X se $\forall x \in X$, accade che $-x \in X$ ed è verificata la seguente relazione: $f(-x) = -f(x)$.

Tra le funzioni elementari come esempio di funzione dispari possiamo considerare $f(x) = x^3$, infatti noi sappiamo che $f(-x) = -x^3 = -f(x)$ e la definizione di funzione dispari è verificata. Un altro esempio di funzione dispari è la funzione $f(x) = \sin x$ (provate a verificarlo!). Osserviamo che il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine del riferimento cartesiano. Osserviamo che una funzione per essere *dispari* deve avere dominio X simmetrico rispetto a 0, insomma se $x_0 \in X \implies -x_0 \in X$. Se una funzione non ha dominio simmetrico rispetto a 0 non può essere *dispari*. Inoltre se $0 \in X$ allora $f(0) = 0$ e questo perchè, essendo dispari, $f(-0) = -f(0) \implies f(0) = -f(0) \implies 2f(0) = 0 \implies f(0) = 0$. Insomma una funzione dispari definita in 0 deve necessariamente passare per l'origine del riferimento cartesiano. Questo vuol dire che se una funzione è *dispari* e non passa per l'origine non è definita in $x = 0$ come è possibile constatare dal successivo grafico.

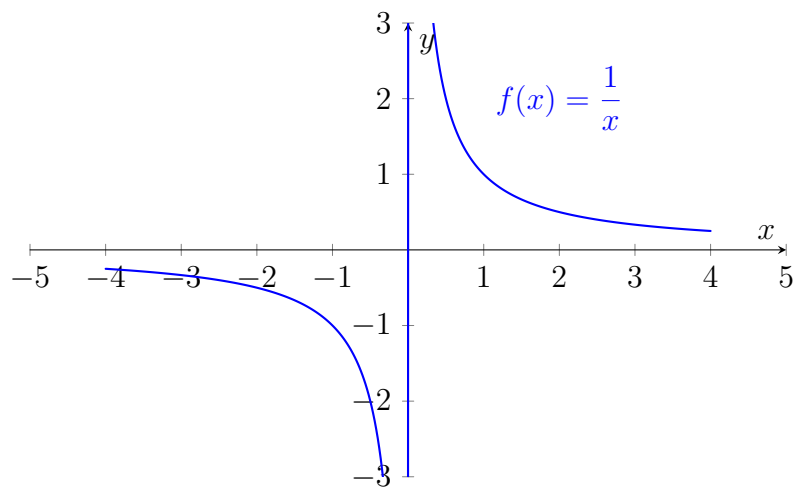


Figura 24: Grafico della della funzione reciproca della funzione identica

Osservazione 3 *Lo abbiamo già detto in precedenza e vogliamo ulteriormente precisarlo. Quando si fa lo studio del grafico di una funzione nell'andare alla ricerca di eventuali simmetrie, funzione pari o funzione dispari, conviene osservare che il dominio X della funzione sia simmetrico rispetto a 0. Se una funzione non ha dominio simmetrico rispetto a 0 inutile procedere nella ricerca di simmetrie (pari o dispari).*

4 Le funzioni periodiche

Supponiamo di avere una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Definizione 6 *Diremo che la funzione f è periodica se esiste un numero $T > 0$ per il quale $x, x + T \in X$ con $f(x) = f(x + T)$. Se invece esiste $T' > 0$ il minimo numero reale positivo per il quale $f(x) = f(x + T')$, allora $T' > 0$ si dice minimo periodo. Questa ultima precisazione non è banale perchè esistono funzioni f che sono periodiche ma che non ammettono un $T' > 0$ come minimo periodo.*

Per la definizione appena data non è sbagliato dire che la funzione $f(x) = \sin x$ è una funzione periodica di periodo $T = 4\pi$, ma sappiamo anche che essa è una funzione periodica che ammette $T' = 2\pi$ come minimo periodo. Ci sono funzioni periodiche che non ammettono minimo periodo T' e per chi volesse approfondire può prendere come esempio la *funzione di Dirichlet*.

Vogliamo subito fare una precisazione quando in questo paragrafo parliamo di periodo $T > 0$ di una funzione periodica non intenderemo che quello è il minimo periodo, potrebbe anche esserlo ma non è detto che lo sia. Facciamo questa precisazione perché capiterà di studiare il grafico di una funzione periodica, ora se il grafico viene esplicitato nel periodo T che non è il minimo periodo $T' > 0$ non si commette nessun errore. Facciamo subito un esempio per quello appena detto.

Tra le funzioni elementari come esempio di funzione periodica possiamo considerare $f(x) = \sin x$ che ha minimo periodo $T' = 2\pi$, infatti noi sappiamo che $f(x) = \sin x$ e $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi)$ ed essendo $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ la definizione di funzione periodica è verificata. Abbiamo parlato di minimo periodo perché è anche vero che $\sin x = \sin(x + 4\pi)$ e quindi $T = 4\pi$ è un periodo della funzione $f(x) = \sin x$. Se noi facciamo il grafico della funzione $f(x) = \sin x$ nell'intervallo $[0, 4\pi]$ non facciamo altro che riportare il grafico di $[0, 2\pi]$ anche in $[2\pi, 4\pi]$ e ai fini del grafico non commettiamo errore. Un altro esempio di funzione periodica è la funzione $f(x) = \tan x$ (provate a verificarlo!) e il suo minimo periodo è $T' = \pi$. Osserviamo che una funzione per essere periodica deve avere dominio X illimitato (tra non molto chiariremo meglio il concetto di *insieme illimitato*).

Attenzione le funzioni $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \arctg x$, $f(x) = \operatorname{arccotg} x$ non sono funzioni periodiche, le prime due hanno dominio X limitato e le ultime due pur avendo come dominio $X = \mathbb{R}$ non sono per nulla periodiche. Bisogna anche aggiungere che ad essere periodiche non sono solo le funzioni goniometriche elementari: $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$, ci sono altre funzioni periodiche che hanno altra natura e una di esse è la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} x - n & \text{se } x \in [n, n+1] \text{ con } n \text{ pari} \\ -x + n + 1 & \text{se } x \in [n, n+1] \text{ con } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Il grafico della funzione in alto è il seguente:

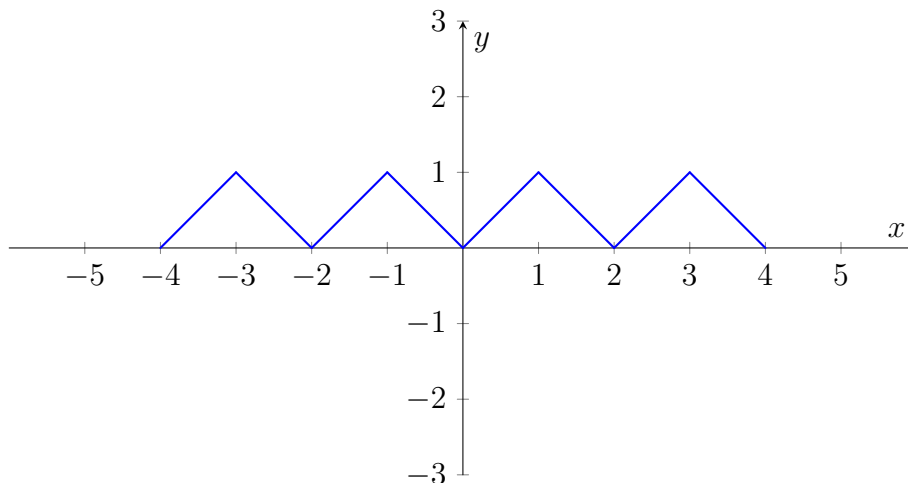


Figura 25: Grafico di una funzione periodica di periodo minimo $T' = 2$

La questione legata al calcolo del minimo periodo $T' > 0$ quando si generano nuove funzioni a partire da funzioni periodiche è abbastanza delicata e noi ci limitiamo ad enunciare questa proposizione e far vedere poi come si calcola il periodo T di funzioni periodiche, se poi esso è anche il minimo periodo a noi non interessa. Nel futuro per evitare di commettere sviste parleremo di periodo T , senza precisare che sia un periodo o il minimo periodo.

Proposizione 7 Se $f(x)$ è una funzione periodica di periodo T , allora la funzione $f(kx)$ è periodica di periodo $S = \frac{T}{|k|}$. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni periodiche di periodo rispettivamente T_f e T_g , allora se $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}$ le funzioni $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$ sono funzioni periodiche di periodo $T = m.c.m.(T_f, T_g)$ (abbiamo parlato di periodo perchè non è garantito che T sia il minimo e il periodo potrebbe essere anche un sottomultiplo di T). Se $\frac{T_f}{T_g} \notin \mathbb{Q}$ le funzioni $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$ non sono funzioni periodiche.

Esempio 23 La funzione $f(x) = \sin 5x$ è periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{5}$. La funzione $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$ è periodica di periodo $T = \frac{\pi}{\frac{1}{3}}$ e quindi $T = 3\pi$. La funzione $f(x) = \cos \frac{1}{4}x$ è periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}}$ e quindi $T = 8\pi$.

Esempio 24 La funzione $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$ è periodica di periodo $T = m.c.m.(2\pi, \pi) = 2\pi$. Vediamo come si calcola il periodo di $f(x) = \sin 3x + \operatorname{tg} 5x$, il primo addendo ha periodo $T_1 = \frac{2\pi}{3}$

e il secondo addendo ha periodo $T_2 = \frac{\pi}{5}$. Riportiamo al entrambi i periodo con il medesimo denominatore e quindi $T_1 = \frac{10\pi}{15}$ e $T_2 = \frac{3\pi}{15}$, allora m.c.m. $\left(\frac{10\pi}{15}, \frac{3\pi}{15}\right) = \frac{30\pi}{15} = 2\pi$ e quindi la funzione $f(x) = \sin 3x + \operatorname{tg} 5x$ ha periodo $T = 2\pi$.

Esempio 25 Vediamo come si calcola il periodo di $f(x) = \sin 3x + \operatorname{tg} 5x$, il primo addendo ha periodo $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ e il secondo addendo ha periodo $T_2 = \frac{\pi}{5}$. Riportiamo entrambi i periodi con il medesimo denominatore e quindi $T_1 = \frac{10\pi}{15}$ e $T_2 = \frac{3\pi}{15}$, allora m.c.m. $\left(\frac{10\pi}{15}, \frac{3\pi}{15}\right) = \frac{30\pi}{15} = 2\pi$ e quindi la funzione $f(x) = \sin 3x + \operatorname{tg} 5x$ ha periodo $T = 2\pi$.

Esempio 26 Vediamo come si calcola il periodo di $f(x) = \sin \frac{1}{3}x + \cos 3x$, il primo addendo ha periodo $T_1 = 6\pi$ e il secondo addendo ha periodo $T_2 = \frac{2\pi}{3}$. Riportiamo al entrambi i periodi con il medesimo denominatore e quindi $T_1 = \frac{18\pi}{3}$ e $T_2 = \frac{2\pi}{3}$, allora m.c.m. $\left(\frac{18\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{18\pi}{3} = 6\pi$ e quindi la funzione $f(x) = \sin \frac{1}{3}x + \cos 3x$ ha periodo $T = 6\pi$.

Esempio 27 Vediamo come si calcola il periodo di $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$, il primo addendo ha periodo $T_1 = 2\pi$ e il secondo addendo ha periodo $T_2 = \frac{2\pi}{3}$. Riportiamo al entrambi i periodi con il medesimo denominatore e quindi $T_1 = \frac{6\pi}{3}$ e $T_2 = \frac{2\pi}{3}$, allora m.c.m. $\left(\frac{6\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$ e quindi la funzione $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$ ha periodo $T = 2\pi$, in questo caso noi concludiamo che $T = 2\pi$ è un periodo della funzione e vi metto per iscritto che in questo caso $T' = \pi$ è il minimo periodo. Diciamo che le tecniche evidenziate servono di certo per calcolare un periodo T e se poi quello è il minimo periodo è altro discorso.

Esempio 28 Vediamo cosa si può dire riguardo alla funzione $f(x) = \sin \sqrt{2}x + \cos x$, il primo addendo ha periodo $T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ e il secondo addendo ha periodo $T_2 = 2\pi$. Osserviamo che il rapporto dei periodi $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ e possiamo concludere che la funzione $f(x) = \sin \sqrt{2}x + \cos x$ non è periodica. Vedete cosa dice **la Proposizione 4** in alto (se il rapporto dei periodi è un numero reale non razionale, allora la funzione non è periodica). Insomma combinando funzioni periodiche si hanno funzione periodiche quando il rapporto dei periodi è un numero razionale.

Esempio 29 Attenzione soprattutto quando ci sono di mezzo prodotti o quozienti di funzioni periodiche per tentare di "calibrare meglio" il periodo o se vogliamo di determinare il periodo minimo. Ad esempio se noi consideriamo la funzione $f(x) = \sin x \cdot \cos x$, non è sbagliato dire che un periodo della funzione precedente è $T = 2\pi$ però l'espressione possiamo scriverla anche come $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ e in questo caso sappiamo che $T' = \pi$. In uno studio di funzione evidentemente sarebbe stato conveniente $T' = \pi$ perchè il grafico nell'intervallo $[\pi, 2\pi]$ è una "duplicazione" di quello in $[0, \pi]$. Spero di aver fatto comprendere che un periodo T lo calcoliamo sempre e non garantiamo che esso sia il minimo periodo.

Esempio 30 Calcolare il periodo delle delle funzioni $f(x) = \frac{\sin 2x + \cos x}{\tan \frac{\pi}{4}}$

5 Le funzioni monotone

Supponiamo di avere una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $A \subseteq X$.

Definizione 8 Diremo che la funzione f è crescente in A se $\forall x, y \in A$ con $x < y$ si ha che $f(x) \leq f(y)$.

Insomma il grafico di una funzione crescente può avere dei tratti dove è costante, il grafico di una funzione crescente può essere fatto nel seguente modo:

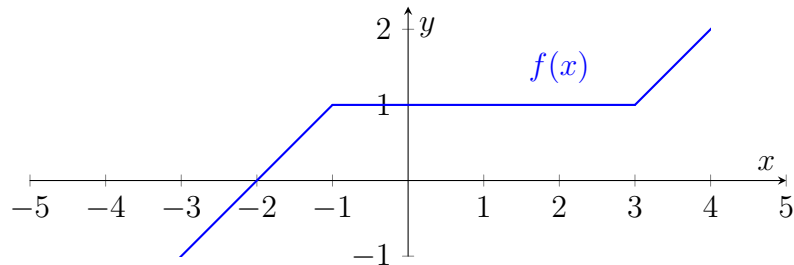


Figura 26: Grafico di una funzione crescente

Definizione 9 Diremo che la funzione f è strettamente crescente in A se $\forall x, y \in A$ con $x < y$ si ha che $f(x) < f(y)$.

Tra le funzioni elementari che abbiamo preso in considerazione possiamo dire che la funzione quadratica $f(x) = x^2$ è strettamente crescente in $A = [0, +\infty)$. Un altro esempio di funzione strettamente crescente è la funzione $f(x) = a^x$ con $a > 1$ nel suo dominio $X = \mathbb{R}$. Un altro esempio di funzione strettamente crescente in $A = X = \mathbb{R}$ è la funzione $f(x) = 2x + 1$ (trattasi del grafico di una retta).

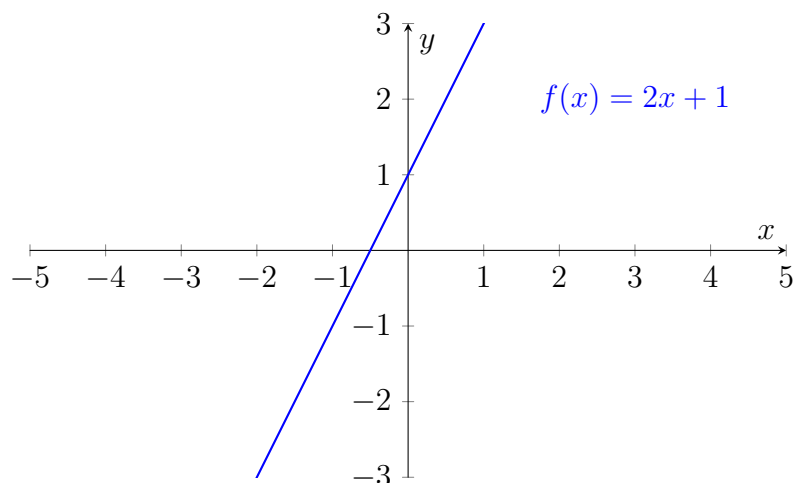


Figura 27: Il grafico di una funzione strettamente crescente

Definizione 10 Diremo che la funzione f è decrescente in A se $\forall x, y \in A$ con $x < y$ si ha che $f(x) \geq f(y)$.

Insomma il grafico di una funzione decrescente può avere dei tratti dove è costante, il grafico di una funzione decrescente può essere fatto nel seguente modo:

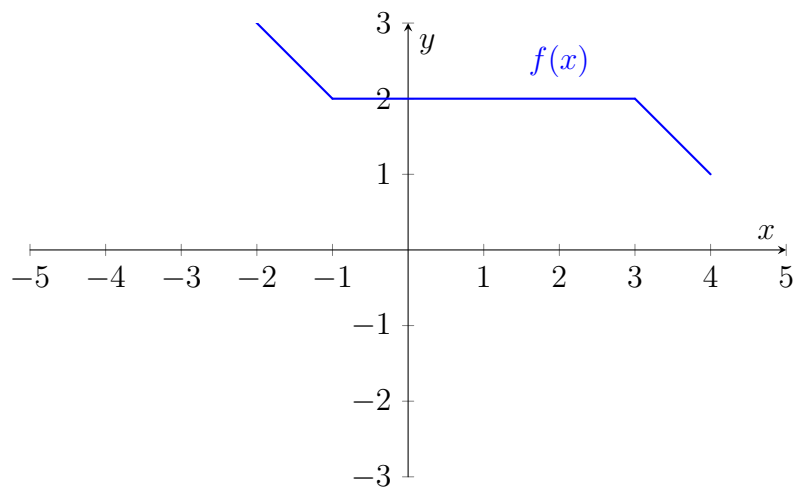


Figura 28: Grafico di una funzione decrescente

Definizione 11 Diremo che la funzione f è strettamente decrescente in A se $\forall x, y \in A$ con $x < y$ si ha che $f(x) > f(y)$.

Tra le funzioni elementari che abbiamo preso in considerazione possiamo dire che la funzione logaritmica $f(x) = \log_a x$ con $0 < a < 1$ è strettamente decrescente in $A = X = (0, +\infty)$. Un altro esempio di funzione strettamente decrescente in $A = X = \mathbb{R}$ è la funzione $f(x) = -3x + 2$ (trattasi del grafico di una retta).

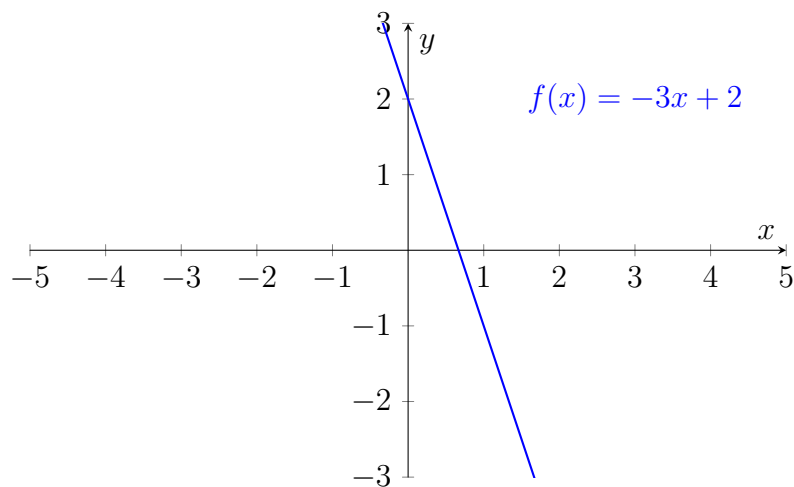


Figura 29: Il grafico di una funzione strettamente decrescente

Osservazione 4 Voglio osservare che taluni autori utilizzano il termine non decrescente come sinonimo di crescente e la locuzione crescente come sinonimo di strettamente crescente, il termine non crescente come sinonimo di decrescente e la locuzione decrescente come sinonimo di strettamente decrescente, dunque fate attenzione quando leggete nei vari testi! Una funzione crescente, strettamente crescente, decrescente o strettamente decrescente si dice una funzione monotona. Attenzione che tali locuzioni sono fortemente legate all'insieme $A \subseteq X$ a cui si riferisce. Per esempio la funzione $f(x) = \sin x$ non è un funzione monotona in $A = \mathbb{R}$ e di certo essa è strettamente crescente in $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

6 Composizione di funzioni

Supponiamo di avere due funzioni, una $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e l'altra $g: Y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con la condizione $f(X) \subseteq Y$, ovvero l'immagine della f sottoinsieme del dominio della g .

Avendo queste due funzioni f, g possiamo fare il seguente ragionamento: $\forall x \in X$ possiamo calcolare $f(x) \in Y$ e quindi avendo g su Y possiamo calcolare $g(f(x))$. In sostanza abbiamo costruito una funzione che $\forall x \in X \rightarrow g(f(x)) \in \mathbb{R}$ e tale funzione si indica con il simbolo:

$$(g \circ f): X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{con la regola che } (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

La funzione $(g \circ f)$ si dice *funzione composta* e si legge *g composto f*. Teniamo conto che la composizione tra funzioni è possibile quando l'immagine della f ovvero $f(X)$ è contenuta nel dominio della g ovvero $f(X) \subseteq Y$. Vediamo di fare qualche esempio:

Esempio 31 Consideriamo la funzione $f(x) = 3x + 1$ e la funzione $g(x) = 4x$, non ci sono dubbi che $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e quindi in questo caso possiamo calcolare sia $(g \circ f)$ che $(f \circ g)$, osserviamo che la prima funzione ad agire su x è la funzione di destra:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 1) = 4(3x + 1) = 12x + 4 \implies (g \circ f)(x) = 12x + 4.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x) = 3(4x) + 1 = 12x + 1 \implies (f \circ g)(x) = 12x + 1.$$

La prima cosa che salta agli occhi è che la composizione in generale non è un'operazione commutativa e quindi $(g \circ f) \neq (f \circ g)$. Ora senza preoccuparci quando è possibile la composizione proviamo a fare qualche esercizio:

Esempio 32 Consideriamo le funzioni $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \sqrt{x - 1}$, allora:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{(x^2 + 1) - 1} = \sqrt{x^2} = |x| \implies (g \circ f)(x) = |x|.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x - 1}) = (\sqrt{x - 1})^2 + 1 = x - 1 + 1 = x \implies (f \circ g)(x) = x.$$

Esempio 33 Consideriamo le funzioni $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = e^x$, allora:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}} \implies (g \circ f)(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = \frac{1}{e^x} \implies (f \circ g)(x) = \frac{1}{e^x}.$$

Esercizio 1 Consideriamo le funzioni $f(x) = \frac{x + 1}{x}$ e $g(x) = \ln x$. Calcolare le funzioni $g \circ f$ e $f \circ g$.

7 Complementi ai numeri reali

Supponiamo che $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione 12 Diremo che $y \in \mathbb{R}$ è un maggiorante dell'insieme A se accade che $y \geq a \quad \forall a \in A$. Un insieme A che ammette qualche maggiorante si dice limitato superiormente, se invece esso non ammette maggioranti si dice non limitato superiormente oppure illimitato superiormente.

Un maggiorante di un insieme A è un numero reale y che è maggiore o uguale di un qualsiasi numero reale appartenente ad A . Ad esempio se consideriamo l'insieme $A = [2, 7)$ possiamo dire che 10 è un maggiorante, addirittura esistono infiniti maggioranti e vi potete divertire. Dunque $A = [2, 7)$ è un insieme limitato superiormente. Se consideriamo $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ esso non ammette maggioranti e quindi rappresenta un insieme *illimitato superiormente*.

Definizione 13 Diremo che $y \in \mathbb{R}$ è un minorante dell'insieme A se accade che $y \leq a \quad \forall a \in A$. Un insieme A che ammette qualche minorante si dice limitato inferiormente, se invece esso non ammette minoranti si dice non limitato inferiormente oppure illimitato inferiormente.

Un minorante di un insieme A è un numero reale y che è minore o uguale di un qualsiasi numero reale appartenente ad A . Ad esempio se consideriamo l'insieme $A = [2, 7)$ possiamo dire che 0 è un minorante, addirittura esistono infiniti minoranti e vi potete divertire. Dunque $A = [2, 7)$ è un insieme limitato inferiormente. Se consideriamo $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ esso non ammette minoranti e quindi rappresenta un insieme *illimitato inferiormente*.

Definizione 14 Assegnato un insieme A diremo che M è il massimo di A e scriviamo $\max A = M$ se M è un maggiorante dell'insieme A che appartiene all'insieme A .

Definizione 15 Assegnato un insieme A diremo che m è il minimo di A e scriviamo $\min A = m$ se m è un minorante dell'insieme A che appartiene all'insieme A .

Il *minimo* e il *massimo* sappiamo che sono numeri reali riferiti ad un insieme A e potrebbero non esistere. Solo alcuni esempi possono chiarire i concetti appena introdotti. Consideriamo l'insieme $A = [-2, 4]$ non ci sono dubbi che il minimo di tale insieme è $m = -2$ e il massimo di tale insieme è $M = 4$. Se consideriamo l'insieme $A = [3, 7)$ esso ammette minimo $m = 3$ ma non esiste un massimo M , qualcuno potrebbe pensare che 7 sia il massimo ma questo non è vero perchè 7 non appartiene a $A = [3, 7)$, di sicuro 7 è un maggiorante di $A = [3, 7)$. In modo analogo se consideriamo l'insieme $A = (-3, 5]$ esso ammette massimo $M = 5$ ma non esiste un minimo m , qualcuno potrebbe pensare che -3 sia il minimo ma questo non è vero perchè -3 non appartiene a $A = (-3, 5]$, di sicuro -3 è un minorante di $A = (-3, 5]$. Infine è facile controllare che l'insieme $A = (3, 10)$ non ha nè minimo e nè massimo. In conclusione assegnato un insieme di numeri reali $A \subseteq \mathbb{R}$ può accadere di tutto relativamente all'esistenza del minimo m o del massimo M . Per ovviare a questi inconvenienti si introducono altri concetti che sono più generali di quello di minimo o massimo ed esistono sempre, si tratta dell'estremo superiore L e dell'estremo inferiore l di un qualsiasi sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Supponiamo che $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione 16 Supponiamo che A ammette qualche maggiorante, diremo che $L \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore dell'insieme A , scrivendo $\sup A = L$, se L è il minimo dei maggioranti. Se l'insieme A non ammette maggioranti, allora diremo che $\sup A = +\infty$.

Definizione 17 Supponiamo che A ammette qualche minorante, diremo che $l \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore dell'insieme A , scrivendo $\inf A = l$, se l è il massimo dei minoranti. Se l'insieme A non ammette minoranti, allora diremo che $\inf A = -\infty$.

Esempio 34 L'insieme $A = (2, 6)$ non ha nè minimo e nè massimo ma $\inf A = 2$ e $\sup A = 6$. Per l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ possiamo dire che $\inf A = \min A = 0$ e $\sup A = +\infty$.

Esempio 35 Se consideriamo $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ possiamo dire che $\inf \mathbb{Z} = -\infty$ e $\sup \mathbb{Z} = +\infty$.

8 Nozioni di Topologia della retta reale

Definizione 18 Se $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice intorno di x_0 , si indica con $I(x_0)$, un qualsiasi intervallo aperto del tipo (a, b) che contiene x_0 . Ad esempio se $3 \in \mathbb{R}$, allora un intorno è $I(3) = (0, 5)$.

Definizione 19 Si dice intorno sinistro di x_0 , si indica con $I^-(x_0)$, un qualsiasi intervallo aperto del tipo (a, x_0) . Ad esempio se $1 \in \mathbb{R}$, allora un intorno sinistro è $I^-(1) = (-2, 1)$.

Definizione 20 Si dice intorno destro di x_0 , si indica con $I^+(x_0)$, un qualsiasi intervallo aperto del tipo (x_0, b) . Ad esempio se $-3 \in \mathbb{R}$, allora un intorno destro è $I^+(-3) = (-3, 0)$.

Definizione 21 Si dice intorno bucato di x_0 , si indica con $I^*(x_0)$, una unione di intervalli del tipo $(a, x_0) \cup (x_0, b)$. Ad esempio se $2 \in \mathbb{R}$, allora un intorno bucato è $I^*(2) = (1, 2) \cup (2, 6)$.

Definizione 22 Si dice intorno di x_0 di raggio ϵ , si indica con $I_\epsilon(x_0)$, un qualsiasi intervallo aperto del tipo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Un intorno di x_0 di raggio ϵ si dice anche una bolla di centro x_0 e raggio ϵ e si indica con $B(x_0, \epsilon)$. Un intorno di x_0 di raggio ϵ corrisponde a

$$I_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tale che } |x - x_0| < \epsilon\}$$

Definizione 23 Si dice intorno bucato di x_0 di raggio ϵ , si indica con $I_\epsilon^*(x_0) = I_\epsilon(x_0) - \{x_0\}$.

Per completare la lista delle definizioni diamo le ultime.

Ampliamento della retta reale

Alla retta reale $\mathbb{R}$ aggiungiamo i seguenti simboli $+\infty$ e $-\infty$, otteniamo la cosiddetta retta reale ampliata $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Questo ampliamento con i due simboli e da non considerare come numeri permette di dare senso a quanto stiamo per esporre.

Definizione 24 Si dice intorno di $+\infty$ un qualsiasi intervallo illimitato superiormente del tipo $I(+\infty) = (a, +\infty)$. Ad esempio è un intorno di $I(+\infty) = (-3, +\infty)$.

Definizione 25 Si dice intorno di $-\infty$ un qualsiasi intervallo illimitato inferiormente del tipo $I(-\infty) = (-\infty, b)$. Ad esempio è un intorno di $I(-\infty) = (-\infty, 0)$.

Definizione 26 Si dice intorno di ∞ l'unione di due intervalli illimitati del tipo $I(\infty) = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$. Ad esempio è un intorno di $I(\infty) = (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$.

Possiamo enunciare un concetto fondamentale per la comprensione del concetto successivo di limite di una funzione. Diamo la definizione di punto di accumulazione.

Definizione 27 Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un qualsiasi numero reale e sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che il punto x_0 è di accumulazione per X se si verifica la seguente importante proprietà:

$$(A) \quad \forall I(x_0) \text{ accade che } I^*(x_0) \cap X \neq \emptyset$$

La proprietà (A) deve essere compresa nella essenza altrimenti non si può apprezzare la bellezza e il grado di raffinatezza che risiede nel concetto di limite di una funzione in un punto x_0 che deve essere necessariamente di accumulazione. I limiti si calcoleranno nei punti di accumulazione del dominio X della funzione e l'insieme di tali punti si dice insieme derivato di X e si indica con $D(X)$. Iniziamo con un esempio:

Consideriamo l'insieme $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}_{n \geq 1}$. I numeri di tali insieme sono infiniti e sono scritti in ordine decrescente ovvero dal più grande al più piccolo. Una buona rappresentazione geometrica sarebbe questa:



Prendiamo $1 \in \mathbb{R}$, osserviamo che $1 \in X$ ma non è un punto di accumulazione perchè non è vera **(A)** basta prendere $I_{\frac{1}{3}}(1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$, questo è un intorno di 1 che non contiene elementi di X diversi da 1; insomma $I^*(1) \cap X = \emptyset$.

Prendiamo $0 \in \mathbb{R}$, osserviamo che $0 \notin X$ ed è un punto di accumulazione perchè è vera **(A)** basta prendere $I(0) = (-\epsilon, \epsilon)$, questo è un intorno di 0 che contiene elementi di X ; insomma $I^*(0) \cap X \neq \emptyset$. Per quanto piccolo possiamo prendere $\epsilon > 0$ non appena $\frac{1}{n} < \epsilon$ ovvero $n > \frac{1}{\epsilon}$, allora nell'intervallo $I(0) = (-\epsilon, \epsilon)$ ci saranno punti di A . Questo vuol dire che 0 è di accumulazione per A .

Con questo esempio abbiamo visto che può accadere che un punto x_0 può appartenere ad un insieme X senza essere un punto di accumulazione è il caso di 1 e vale per ogni altro punto di X . Possiamo dire che tutti i punti di X non sono di accumulazione. L'unico punto di accumulazione di X è lo 0 che non vi appartiene. I punti $x_0 \in X$ che non sono di accumulazione si dicono punti isolati. Nell'esempio precedente tutti i punti di X sono isolati e l'unico punto di accumulazione è 0 che non appartiene a X .

Il punto $x_0 = 2$ appartiene all'insieme $X = [1, 5]$ ed è banalmente di accumulazione. Il punto $x_0 = 3$ non appartiene all'insieme $X = [7, 10]$ e banalmente non è di accumulazione. Si possono fare tanti esempi, con quelli precedenti abbiamo fatto vedere che l'appartenenza ad un insieme e l'essere di accumulazione per un insieme sono concetti indipendenti nel senso che si possono presentare le seguenti situazioni:

(A) Il punto $x_0 \in X$ ed è di accumulazione. Il caso di $x_0 = 2$ e $X = [1, 5]$.

(B) Il punto $x_0 \in X$ e non è di accumulazione. Il caso di $x_0 = 1$ e $X = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$.

(C) Il punto $x_0 \notin X$ ed è di accumulazione. Il caso di $x_0 = 0$ e $X = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$.

(D) Il punto $x_0 \notin X$ e non è di accumulazione. Il caso di $x_0 = 3$ e $X = [7, 10]$.

Intorni di $+\infty$ e $-\infty$

Supponiamo che X sia un insieme illimitato superiormente, allora ha senso dire che $+\infty$ è un punto di accumulazione per X in quanto qualunque sia l'intorno di $+\infty$ ovvero $I(+\infty) = (a, +\infty)$ poichè X è illimitato superiormente $I(+\infty) \cap X \neq \emptyset$. Supponiamo che X sia un insieme illimitato inferiormente, allora ha senso dire che $-\infty$ è un punto di accumulazione per X in quanto qualunque sia l'intorno di $-\infty$ ovvero $I(-\infty) = (-\infty, b)$ poichè X è illimitato inferiormente $I(-\infty) \cap X \neq \emptyset$.

Esempio 36 Consideriamo insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, non è difficile constatare che nessun numero naturale è di accumulazione per $\mathbb{N}$, infatti se $n \in \mathbb{N}$ l'intorno sferico $I_{\frac{1}{2}}^*(n) = \left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{N} = \emptyset$, questo vuol dire che nessun numero naturale è di accumulazione per $\mathbb{N}$. Invece siccome $\mathbb{N}$ è illimitato superiormente possiamo dire che $+\infty$ è un punto di accumulazione per $\mathbb{N}$, infatti qualsiasi sia l'intorno $I(+\infty) = (a, +\infty)$ si ha che $I(+\infty) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$.