

Teorema sul limite della Derivata o Teorema del Tappabuchi

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fericola

4 Marzo 2026

Teorema 1. *del Tappabuchi*

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $(a, b) - \{x_0\}$ ma continua in x_0 . Se accade che $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = m \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile anche in x_0 e si $f'(x_0) = m$.

La dimostrazione non la inserisco ora perchè è conseguenza del del Teorema di Lagrange, diventa interessante riportare degli esempi e come si utilizza.

Esempio 1. Sia assegnata la seguente funzione $f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & x < 0 \\ \sqrt{x+4} & x \geq 0 \end{cases}$

Osserviamo che per $x < 0$ la funzione $g_1(x) = e^x + 1$ è derivabile, analogamente per $x > 0$ la funzione $g_2(x) = \sqrt{x+4}$ è una funzione derivabile. La questione delicata si pone in $x = 0$; intanto vediamo se nel "punto di raccordo" la funzione $f(x)$ è continua:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + 1) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+4} = 2$, dunque la funzione in $x = 0$ è continua e quindi ha senso indagare se in tale punto è derivabile. Applichiamo il Teorema del tappabuchi:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+4}} & x > 0 \end{cases}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \implies f'_-(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x+4}} = \frac{1}{4} \implies f'_+(0) = \frac{1}{4}.$$

Possiamo concludere che f non è derivabile in $x = 0$ e presenta un punto angoloso.

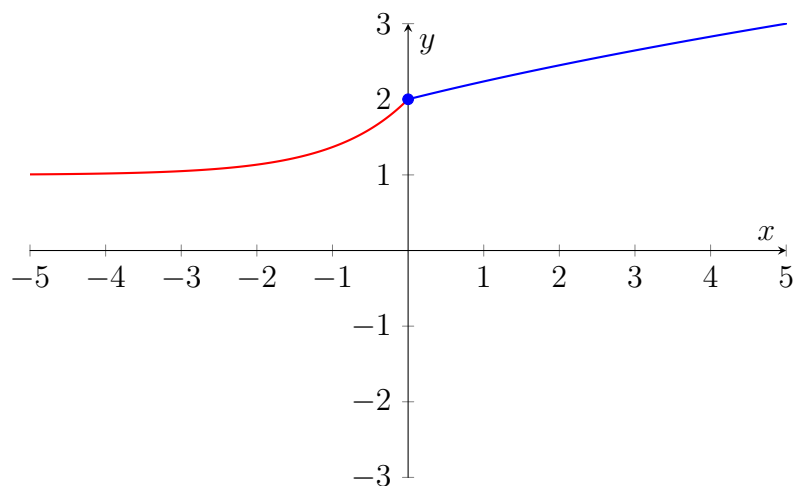


Figura 1: Il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & x < 0 \\ \sqrt{x+4} & x \geq 0 \end{cases}$

Esempio 2. Sia assegnata la seguente funzione $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x + 1 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ x^2 + x + 1 & x < 0 \end{cases}$

Osserviamo che per $x < 0$ la funzione $g_1(x) = x^2 + x + 1$ è derivabile, analogamente per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ la funzione $g_2(x) = \operatorname{tg} x + 1$ è una funzione derivabile. La questione delicata si pone in $x = 0$; intanto vediamo se nel "punto di raccordo" la funzione $f(x)$ è continua:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x + 1) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x + 1) = 1$, dunque la funzione in $x = 0$ è continua e quindi ha senso indagare se in tale punto è derivabile. Appliciamo il Teorema del tappabuchi:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2x + 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + 1) = 1 \implies f'_-(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos^2 x} = 1 \implies f'_+(0) = 1.$$

Possiamo concludere che f è derivabile in $x = 0$ e $f'(0) = 1$ e la retta tangente in $(0, 1)$ ha equazione $y - 1 = 1(x - 0)$ ovvero $y = x + 1$.

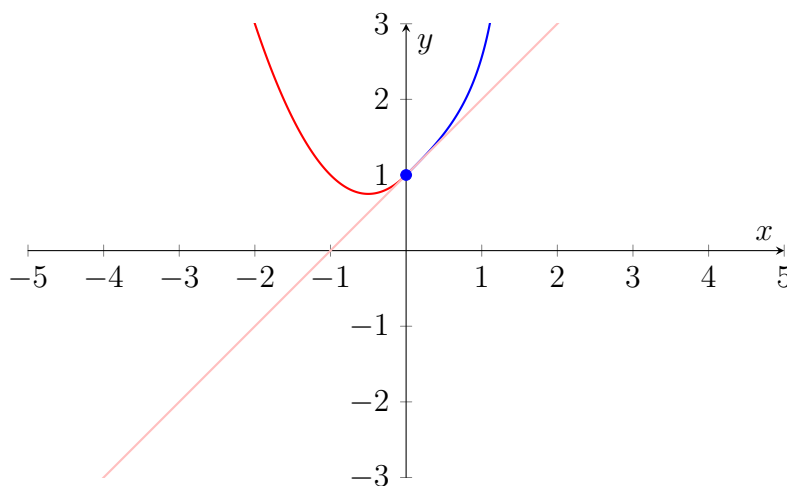


Figura 2: Il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x + 1 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ x^2 + x + 1 & x < 0 \end{cases}$

Esercizio 1. Studiare la derivabilità della seguente funzione in $X = [0, +\infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - (x - 1)^2} & 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x - 2} & x \geq 2 \end{cases}$$

Esercizio 2. Determina per quali valori $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è derivabile in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + bx + 2 & x \leq 0 \\ 3 \sin x + a \cos x & x > 0 \end{cases}$$