

Una breve nota sui Limiti Notevoli

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fericola

6 Dicembre 2025

In questa breve nota metteremo in tabellina alcuni limiti che per la loro importanza vanno sotto il nome di *Limiti Notevoli*, ecco la nostra tabellina:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$	e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ con $a > 0 \wedge a \neq 1$
g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ con $a > 0$	i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$	k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$	l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

Osservazione 1. Tutti i limiti si presentano nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ tranne quello in b) che si presenta nella forma indeterminata $1^{\pm\infty}$.

Osservazione 2. Il limite in f) vale per $a \in \mathbb{R}^+$ numero reale positivo con $a \neq 1$ in quanto è la base di un logaritmo.

Osservazione 3. Il limite in h) vale per $a \in \mathbb{R}^+$ numero reale positivo, questa volta va bene anche $a = 1$ in quanto se così fosse si avrebbe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0 = \ln 1$.

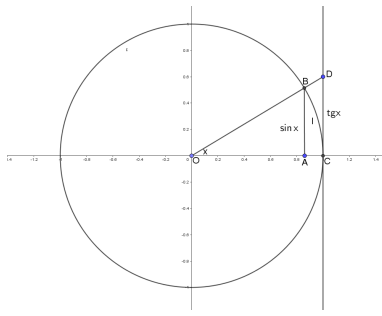
Osservazione 4. Il limite in j) vale per $a \in \mathbb{R}$ numero reale positivo, nullo o negativo.

Se $\alpha < 0 \Rightarrow -\alpha > 0$ e quindi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^{-\alpha}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+x)^{-\alpha}}{(1+x)^{-\alpha} x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{-\alpha} - 1}{(1+x)^{-\alpha} x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{(1+x)^{-\alpha} - 1}{x \cdot (1+x)^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{(1+x)^{-\alpha} - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x)^{-\alpha}} = -(-\alpha) \cdot 1 =$
 α . La conclusione che il limite in j) vale per $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione di a).

Sia $0 < x < \epsilon$ un angolo in radianti "abbastanza piccolo". Noi sappiamo che la circonferenza goniometrica ha raggio $r = 1$ e la sua lunghezza vale $l_C = 2\pi \cdot r = 2\pi$. Se indichiamo con l la lunghezza dell'arco $\widehat{CB}$ possiamo scrivere questa proporzione $l : x = l_C : 2\pi$ ovvero che $l : x = 2\pi : 2\pi$ e deduciamo che $l = x$. Dalla figura si ha che valgono le seguenti disuguaglianze: $\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$ poichè $0 < x < \epsilon$, allora $\sin x > 0$ e quindi dividendo per tale quantità si ottiene:

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$



Eseguendo il limite otteniamo: $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x}$, sappiamo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$ e per il Teorema del Confronto abbiamo anche che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$ ovvero $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, allora in forma compatta abbiamo $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Per com-

pletare la dimostrazione della a) resta da provare che $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$ ma questo è abbastanza semplice. Noi sappiamo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ e vogliamo calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}$ operiamo la sostituzione $x = -t$, allora $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{\sin(t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$, allora anche $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$ e quindi possiamo concludere che limite destro e limite sinistro coincidono e la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ammette limite in $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dimostrazione di b) omessa

Dimostrazione di c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1,$$

allora in forma compatta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Dimostrazione di d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot (1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos x)} = 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

allora in forma compatta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

Dimostrazione di e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos x)} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

allora in forma compatta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Dimostrazione di f)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}, \text{ poniamo } x = \frac{1}{t} \text{ e quindi } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\log_a\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} t \log_a\left(1 + \frac{1}{t}\right) =$$
$$= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \log_a\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \log_a e,$$

allora in forma compatta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, con $a > 0 \wedge a \neq 1$. Osserviamo che g) si ottiene da f) ponendo $a = e$.

Dimostrazione di h)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, \text{ poniamo } a^x - 1 = t \implies a^x = 1 + t \implies x = \log_a(1+t) \text{ e quindi}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a,$$

allora in forma compatta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, con $a > 0$. Osserviamo che i) si ottiene da h) ponendo $a = e$.

Dimostrazione di j)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x}, \text{ abbiamo sfruttato la relazione } (1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}, =$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{\alpha \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x}$$

Ora il primo dei due fattori appena scritto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)}$ con la sostituzione $t = \alpha \ln(1+x)$ diventa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ e il secondo fattore è $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \alpha$ e quindi in definitiva possiamo scrivere che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = 1 \cdot \alpha = \alpha$.

allora in forma compatta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Questo conclude le dimostrazioni dei *Limiti Notevoli*, ad occhio attento si percepisce perchè i limiti in a) e b) giocano un ruolo fondamentale.

Prima di chiudere questa nota voglio elencare ancora quattro limiti dove il primo di esso è stato provato a lezione:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$

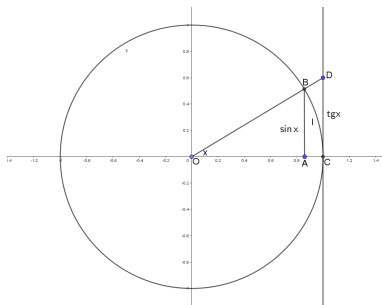
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$

Esercizio 1. Dimostrare b) e c). L'aiutino è nel b) utilizzate la sostituzione $x = e^{-t}$ e nel c) la sostituzione $x = e^t$. sarete voi a scoprire quanto vale l'ultimo ovviamente con una dimostrazione convincente!

Osservazione 5. Questa osservazione riguarda un piccolo approfondimento sul limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, in questo limite la variabile x è espressa in radianti. Gli angoli si possono misurare anche in gradi sessagesimali e in tal caso si dimostra che:

$$\lim_{x^\circ \rightarrow 0^\circ} \frac{\sin x^\circ}{x^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

Dimostrazione di a).



Sia $0^\circ < x^\circ < \epsilon^\circ$ un angolo in gradi sessagesimali "abbastanza piccolo". Noi sappiamo che la circonferenza goniometrica ha raggio $r = 1$ e la sua lunghezza vale $l_C = 2\pi \cdot r = 2\pi$. Se indichiamo con l la lunghezza dell'arco $\widehat{CB}$ possiamo scrivere questa proporzione $l : x^\circ = l_C : 360^\circ$ ovvero che $l : x^\circ = 2\pi : 360^\circ$ e deduciamo che $l = \frac{x^\circ \pi}{180^\circ}$. Dalla figura si ha che valgono le seguenti disuguaglianze: $\sin x^\circ \leq \frac{x^\circ \pi}{180^\circ} \leq \text{tg} x^\circ$ poichè $0^\circ < x^\circ < \epsilon^\circ$, allora $\sin x^\circ > 0$ e quindi dividendo per tale quantità si ottiene:

$$1 \leq \frac{x^\circ \pi}{\sin x^\circ \cdot 180^\circ} \leq \frac{1}{\cos x^\circ}$$

Eseguendo il limite otteniamo: $\lim_{x^\circ \rightarrow 0^{0+}} \frac{x^\circ \pi}{\sin x^\circ \cdot 180^\circ} \leq \lim_{x^\circ \rightarrow 0^{0+}} \frac{1}{\cos x^\circ}$, sappiamo che $\lim_{x^\circ \rightarrow 0^{0+}} \frac{1}{\cos x^\circ} = \frac{1}{1} = 1$ e per il Teorema del Confronto abbiamo anche che $\lim_{x^\circ \rightarrow 0^{0+}} \frac{x^\circ}{\sin x^\circ} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 1$ ovvero $\lim_{x^\circ \rightarrow 0^{0+}} \frac{x^\circ}{\sin x^\circ} = \frac{180^\circ}{\pi}$, di conseguenza $\lim_{x^\circ \rightarrow 0^{0+}} \frac{\sin x^\circ}{x^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$. Per completare la dimostrazione della a) resta da provare che $\lim_{x^\circ \rightarrow 0^{0-}} \frac{\sin x^\circ}{x^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$ ma questo è abbastanza semplice. Noi sappiamo che $\lim_{x^\circ \rightarrow 0^{0+}} \frac{\sin x^\circ}{x^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$ e vogliamo calcolare $\lim_{x^\circ \rightarrow 0^{0-}} \frac{\sin x^\circ}{x^\circ}$ operiamo la sostituzione $x^\circ = -t^\circ$, allora $\lim_{x^\circ \rightarrow 0^{0-}} \frac{\sin x^\circ}{x^\circ} = \lim_{t^\circ \rightarrow 0^{0+}} \frac{\sin(-t^\circ)}{-t^\circ} = \lim_{t^\circ \rightarrow 0^{0+}} \frac{\sin(t^\circ)}{t^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$, allora anche $\lim_{x^\circ \rightarrow 0^{0-}} \frac{\sin x^\circ}{x^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$ e quindi possiamo concludere che limite destro e limite sinistro coincidono e la funzione $f(x^\circ) = \frac{\sin x^\circ}{x^\circ}$ ammette limite in $x^\circ = 0^\circ$:

$$\lim_{x^\circ \rightarrow 0^\circ} \frac{\sin x^\circ}{x^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$