

Integrazione Limiti Notevoli

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fericola

10 Dicembre 2025

In questa nota riporteremo alcuni limiti già messi in evidenza nel passato e ne metteremo altri in evidenza che sono l'altra faccia di una stessa medaglia. Indichiamo quelli che ci interessano:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 & \text{b)} & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e & \text{c)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tgx}{x} = 1 \\ \text{d)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 & \text{e)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctgx}{x} = 1 & \text{f)} & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \\ \text{g)} & \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e & \text{h)} & \lim_{x \rightarrow 0} (1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k \end{array}$$

Dimostrazione di d). Sappiamo che la funzione $f(x) = \sin x$ ristretta al dominio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ammette come inversa la funzione $f^{-1}(x) = \arcsin x$, inoltre vale la relazione $\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, allora se noi optiamo per la sostituzione $x = \sin t$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin(\sin t)}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

allora in forma compatta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

Dimostrazione di e). Sappiamo che la funzione $f(x) = tgx$ ristretta al dominio $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ammette come inversa la funzione $f^{-1}(x) = \arctgx$, inoltre vale la relazione $\arctg(tgx) = x \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, allora se noi optiamo per la sostituzione $x = tg(t)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctgx}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctg(tg(t))}{tg(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{tg(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{tg(t)}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

allora in forma compatta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctgx}{x} = 1$.

Dimostrazione di f). Sappiamo che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k} \cdot k}$, se operiamo con la sostituzione $\frac{k}{x} = \frac{1}{t}$, otteniamo $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k} \cdot k} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t \cdot k} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^k = e^k$.

allora in forma compatta $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$.

Dimostrazione di g)

Il limite in g) si tratta del limite in b), per convincersi basta la sostituzione $x = \frac{1}{t}$ e se $x \rightarrow 0$, allora $t \rightarrow \pm\infty$.

Dimostrazione di h)

Il limite in h) si tratta del limite in f), per convincersi basta la sostituzione $x = \frac{1}{t}$ e se $x \rightarrow 0$, allora $t \rightarrow \pm\infty$.