

Alcuni teoremi sulle funzioni continue

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola

16 Dicembre 2025

Sappiamo che una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Questa volta le funzioni continue le consideriamo definite in un intervallo del tipo $I = [a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e ovviamente $a < b$. In sostanza noi considereremo le funzioni continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definite in un intervallo *chiuso e limitato*, l'insieme di tutte le funzioni definite in I che siano continue si indica con $C^0[a, b]$. Ovviamente C sta per *continue*, $[a, b]$ sta per il *dominio* e invece lo 0 come apice si capirà nel futuro. Non facciamo mai nulla a caso!

Siamo in grado di poter enunciare il primo teorema:

Teorema 1. [degli zeri], Bernard Bolzano (1781 – 1848)

Se $f \in C^0[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.

Commenti

Il punto c ovviamente deve essere interno ad $[a, b]$ e non può essere un estremo in quanto negli estremi la funzione deve avere segno positivo o negativo. Il teorema dice se abbiamo una funzione continua definita in un intervallo chiuso del tipo $[a, b]$ e agli estremi dell'intervallo assume segno opposto ovvero $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ oppure $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, allora possiamo essere certi che in (a, b) troveremo uno *zero della funzione* ovvero esisterà almeno un punto del grafico della funzione di coordinate $P \equiv (c, 0)$ ovvero il grafico di f interseca l'asse delle ascisse in almeno un punto. Attenzione che le condizioni sono sufficienti ma non necessarie e questo vuol dire che se le condizioni delle ipotesi si verificano la tesi è vera, ma potrei avere degli zeri anche con funzioni che non verificano le ipotesi.

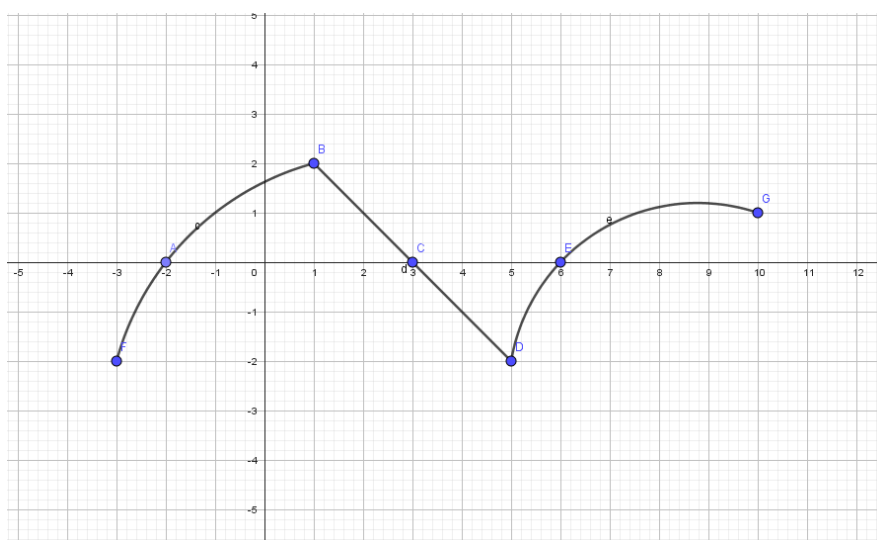


Fig.1

Dalla Fig.1 abbiamo $f : [-3, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(-3) = -2 < 0$ e $f(10) = 1 > 0$ e abbiamo addirittura tre zeri: $c_1 = -2$, $c_2 = 3$ e $c_3 = 6$. Se focalizziamo l'attenzione ad una parte di grafico si potrà considerare la funzione $g : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ e sarete voi a concludere.

Teorema 2. [di Weierstrass sul massimo e minimo], Karl Weierstrass (1815 – 1897)

Se $f \in \mathcal{C}^0[a, b]$, allora esistono $c_1, c_2 \in [a, b]$ con $f(c_1) = m$ e $f(c_2) = M$, rispettivamente minimo assoluto e massimo assoluto della funzione f .

Commenti

Il teorema dice se abbiamo una funzione continua definita in un intervallo chiuso del tipo $[a, b]$ essa ammette minimo assoluto m e massimo assoluto M .

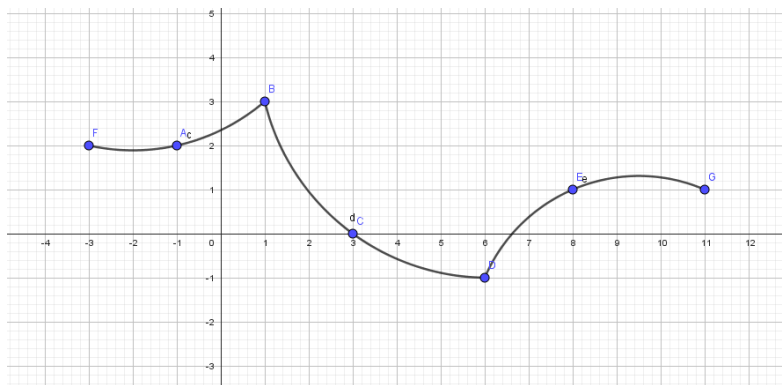


Fig.2

Dalla Fig.2 possiamo dire che $m = -1$ e $M = 3$. Il massimo assoluto lo assume nel punto $c_1 = 1$ e per il minimo assoluto $c_2 = 6$. Se focalizziamo l'attenzione ad una parte di grafico si potrà considerare la funzione $h : [6, 11] \rightarrow \mathbb{R}$ e sarete voi a concludere.

Teorema 3. [dei valori intermedi], Bolzano-Jean Gaston Darboux (1842 – 1917)

allora Se $f \in \mathcal{C}^0[a, b]$ e siano m e M il minimo e massimo assoluto, allora $\forall k \in [m, M]$ esiste $c \in [a, b]$ con $f(c) = k$.

Commenti

Sarebbe non banale scrivere nella tesi $\forall k \in (m, M)$, in quanto se $k = m$ o $k = M$ l'esistenza di c è garantita dal Teorema di Weierstrass. Il teorema dunque dice che se abbiamo una funzione continua definita in un intervallo chiuso del tipo $[a, b]$ essa ammette tutti i valori tra il minimo assoluto m e il massimo assoluto M .

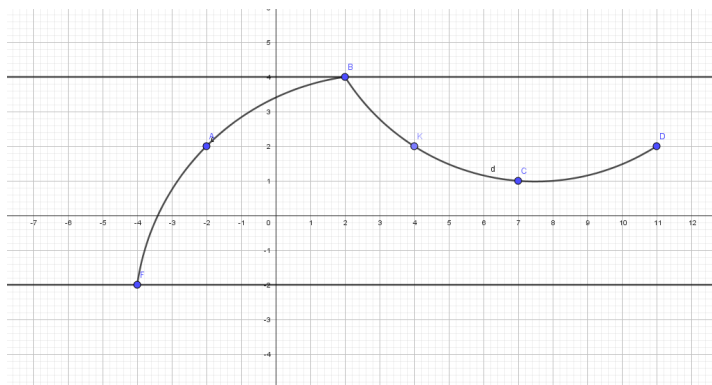


Fig.3

Dalla Fig.3 possiamo dire che $m = -2$ e $M = 4$. Se noi prendiamo un $k \in [-2, 4]$, ad esempio $k = 2$ troviamo addirittura tre punti $c_1 = -2$, $c_2 = 4$ e $c_3 = 11$ e $f(-2) = f(4) = f(11) = 2$. Se $k = 0$ cercate di rispondere.

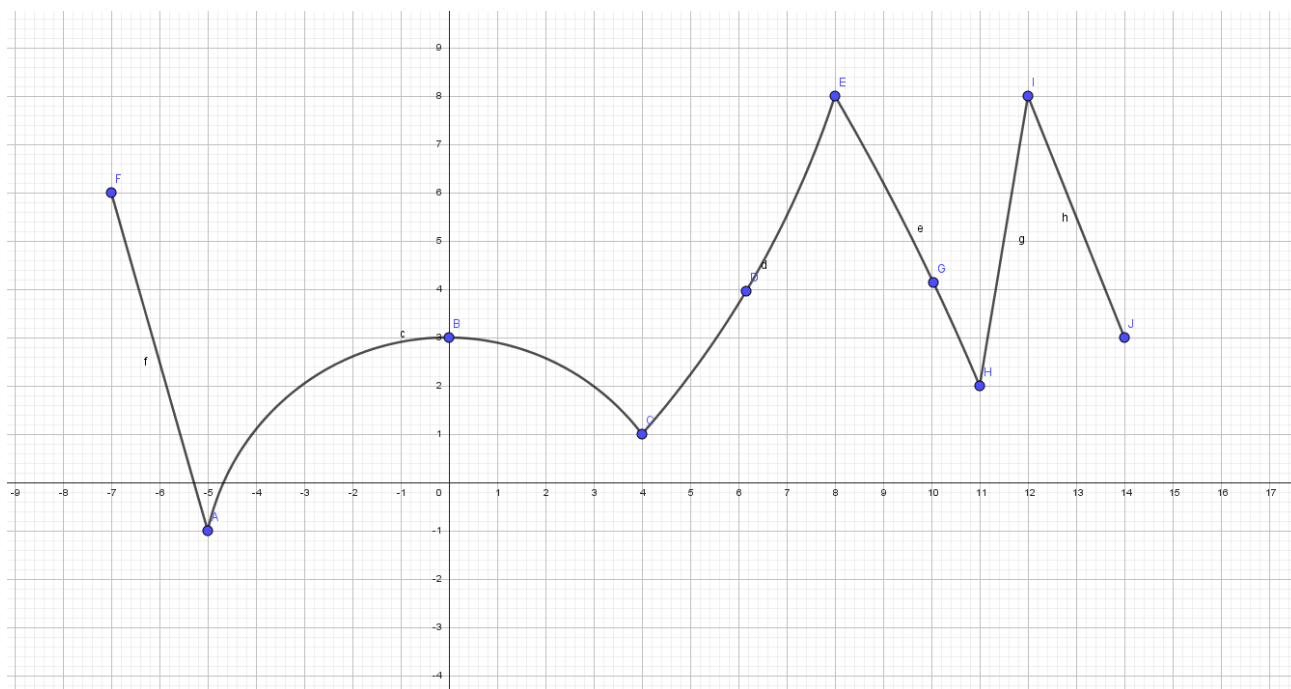


Fig.4

Punto di minimo-massimo relativo e assoluto

Osservazione 1. Vorrei chiarire alcuni concetti con i quali familiarizzeremo nel futuro anche se alcuni sono già noti. Cercheremo di chiarire con esempi le locuzioni punto di minimo relativo, punto di massimo relativo, punto di minimo assoluto, punto di massimo assoluto, minimo relativo, massimo relativo, minimo assoluto e massimo assoluto.

Quanto la locuzione inizia con *punto* si riferisce al dominio X della funzione e quando non c'è il termine *punto* si riferisce all'immagine della funzione $f(X)$.

Diciamo immediatamente che il *minimo assoluto* e *massimo assoluto* sono unici e di riferiscono al minimo e al massimo di $f(X)$ (insieme immagine); gli altri possono essere anche più di uno o addirittura non esistere.

Analizzando il grafico della funzione in Fig.4 diciamo subito che il *minimo assoluto* è $m = -1$ e il *massimo assoluto* è $M = 8$ ed essi sono unici!

Invece $c_1 = -5$, $c_2 = 4$ e $c_3 = 11$ e $c_4 = 14$ sono *punti di minimo relativo* e $c_1 = -5$ è anche *punto di minimo assoluto*. Osservate che un punto di *minimo assoluto* è anche punto di *minimo relativo* e non vale il viceversa ad esempio $c_2 = 4$ che è punto di minimo relativo ma non è punto di minimo assoluto.

Invece $c_5 = -7$, $c_6 = 0$ e $c_7 = 8$ e $c_8 = 12$ sono *punti di massimo relativo* e si nota che $c_7 = 8$, $c_8 = 12$ sono *punto di massimo assoluto*. Osservate che un punto di *massimo assoluto* è anche punto di *massimo relativo* e non vale il viceversa ad esempio $c_6 = 0$ che è punto di massimo relativo ma non è punto di massimo assoluto.

Pensiamo ad una grafico di una funzione $g(x)$ nell'intervallo $[4, 8]$, possiamo concludere che il *minimo assoluto* è $m = 1$ e il *massimo assoluto* è $M = 8$, esiste ovviamente il *punto di minimo assoluto* $c_2 = 4$ e il *punto di massimo assoluto* $c_7 = 8$ e null'altro.