

Osservazioni preliminari

In questa nota vogliamo dare alcune indicazioni sintetiche che ci permetteranno di calcolare i limiti in $x_0 = -\infty$ e $x_0 = +\infty$ di una funzione razionale fratta. Ricordiamo che una funzione razionale fratta è data dal rapporto di due polinomi e dunque del tipo:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Noi faremo le seguenti convenzioni:

(a) Il grado di $p(x)$ lo indichiamo con m e il suo *parametro direttore* a (il *parametro direttore* è il coefficiente del monomio di grado massimo)

(b) Il grado di $q(x)$ lo indichiamo con n e il suo *parametro direttore* b (il *parametro direttore* è il coefficiente del monomio di grado massimo)

Se consideriamo l'espressione $f(x) = \frac{-5x^4 + 2x^3 - 1}{2x^3 + x + 3}$, allora in base a quanto affermato in (a) si ha che $m = 4$ e $a = -5$; in base a quanto affermato in (b) si ha che $n = 3$ e $b = 2$.

- (A) Caso $x \rightarrow +\infty$

(1) Se $m > n$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = +\infty \cdot \left(\frac{a}{b}\right)$

(2) Se $m = n$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a}{b}$

(3) Se $m < n$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0^+ \cdot \left(\frac{a}{b}\right)$

- (B) Caso $x \rightarrow -\infty$

(1) Se $m > n$, allora $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} +\infty \cdot \left(\frac{a}{b}\right), & \text{se } m - n \text{ è pari} \\ -\infty \cdot \left(\frac{a}{b}\right), & \text{se } m - n \text{ è dispari} \end{cases}$

(2) Se $m = n$, allora $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a}{b}$

(3) Se $m < n$, allora $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0^+ \cdot \left(\frac{a}{b}\right), & \text{se } n - m \text{ è pari} \\ 0^- \cdot \left(\frac{a}{b}\right), & \text{se } n - m \text{ è dispari} \end{cases}$