

Integrali indefiniti immediati

- $\int k dx = kx + k$
- $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + k \quad \text{con } x > 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k = a^x \log_a e + c$
- $\int e^x dx = e^x + k$
- $\int \sin x dx = -\cos x + k$
- $\int \cos x dx = \sin x + k$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + k$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + k$
- $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + k$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + k$

La tabella precedente viene dedotta dalla tabella di derivazione.

Remark 1 *Calcolando la derivata prima delle funzioni a destra dell'uguale si ottiene la funzione integranda. A destra ci sono le primitive della funzione integranda.*

Ora mettiamo in evidenza due proprietà dell'integrale indefinito:

$$\text{(Proprietà 1)} \quad \int k f(x) dx = k \int f(x) dx \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

$$\text{(Proprietà 2)} \quad \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Example 2 *Determinare i seguenti integrali indefiniti:*

$$\int \frac{4}{\cos^2 x} dx = 4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = 4 \tan x + k$$

$$\int -3e^x dx = -3 \int e^x dx = -3e^x + k$$

Con un linguaggio espressivo diciamo che possiamo portarci fuori dal simbolo di integrale un "FATTORE MOLTIPLICATIVO" o se vogliamo una "COSTANTE" facendo uso della (Proprietà 1).

Example 3 *Determinare il seguente integrale indefinito:*

$$\int \left(\frac{1}{x} + 3^x + \sin x \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int 3^x dx + \int \sin x dx = \ln |x| + \log_3 e \cdot 3^x - \cos x + k$$

Con un linguaggio espressivo diciamo che possiamo svolgere l'integrale indefinito "per pezzi", integrando i singoli addendi!

Remark 4 *Le due proprietà appena messe in evidenza pur essendo semplici non sono banali. Nel senso che proprietà analoghe per la moltiplicazione e la divisione non sono vere!!*

$$\int [f(x) \cdot g(x)] dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx \quad \text{Invece non vale!}$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx} \quad \text{Invece non vale!}$$

$$\text{Non è vero che } \int 2x \cdot \cos x dx = \int 2x dx \cdot \int \cos x dx = x^2 \cdot \sin x + k.$$

$$\text{Non è vero che } \int \frac{e^x}{3x^2} dx = \frac{\int e^x dx}{\int 3x^2 dx} = \frac{e^x}{x^3} + k.$$

Exercise 5 *Determinare i seguenti integrali indefiniti:*

$$\int x^{\frac{2}{3}} dx = \quad \int \sqrt{x} dx = \quad \int \frac{2x^3 + x}{x^2} dx =$$

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \quad \int (x^2 - 1)(x + 1) dx = \quad \int \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^3} dx =$$

Remark 6 *Gli integrali indefiniti dell'esercizio precedenti si calcolano tutti utilizzando la seconda relazione scritta nella sezione degli integrali indefiniti immediati.*

Remark 7 *Teniamo conto della seguente relazione:*

$$df(x) = f'(x)dx$$

Il differenziale di una funzione è uguale alla derivata prima di una funzione per il differenziale della funzione identica x . Tenendo conto di questa identità, la tabella degli INTEGRALI INDEFINITI IMMEDIATI mediante i seguenti passi

$$\begin{array}{lll} 1^\circ \text{Passo} & x & \longrightarrow f(x) \\ 2^\circ \text{Passo} & df(x) & = f'(x)dx \end{array}$$

diventa:

Generalizzazione della tabella degli integrali indefiniti

- $\int f'(x)f(x)^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}f(x)^{\alpha+1} + k \quad \text{con } f(x) > 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + k$
- $\int f'(x)a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + k = a^{f(x)} \log_a e + k$
- $\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + k$
- $\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x) + k$
- $\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x) + k$
- $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \tan f(x) + k$
- $\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} dx = -\cot f(x) + k$
- $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \arcsin f(x) + k$
- $\int -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \arccos f(x) + k$
- $\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \arctan f(x) + k$