

Integrazione di una particolare classe di funzioni

Liceo Assteas -Buccino-

F. FERNICOLA

15 Maggio 2026

Osservazione 1. Ci limiteremo all'integrazione delle funzioni razionali fratte avente per denominatore un polinomio di grado al più 2.

Si esporranno quindi le tecniche per risolvere i seguenti integrali:

$$(1) \quad \int \frac{p(x)}{ax+b} dx \quad \text{e} \quad (2) \quad \int \frac{p(x)}{ax^2+bx+c} dx$$

Possiamo ritenere che il polinomio $p(x)$ sia di grado inferiore al polinomio al denominatore, se questo non fosse vero, eseguendo una divisione tra polinomi, potremmo ricondurci al calcolo di due integrali, l'uno avente come funzione integranda un polinomio intero e l'altro con le caratteristiche messe in evidenza nell'osservazione precedente.

Esempio 1. Calcolare il seguente integrale: $\int \frac{6x^2 - 2x + 3}{2x + 1} dx$; :

Eseguendo una divisione tra i due polinomi si ha che: $\frac{6x^2 - 2x + 3}{2x + 1} = \left(3x - \frac{5}{2}\right) + \frac{\frac{11}{2}}{2x + 1}$ e

quindi l'integrale diventa: $\int \frac{6x^2 - 2x + 3}{2x + 1} dx = \int \left(3x - \frac{5}{2}\right) dx + \int \frac{\frac{11}{2}}{2x + 1} dx$ Il primo dei due integrali si risolve facilmente, mentre il secondo è un integrale del tipo (1) che ci siamo proposti di risolvere.

Esempio 2. Calcolare il seguente integrale: $\int \frac{5x^4 - 3x + 1}{x^2 - 4} dx$; :

Eseguendo una divisione tra i due polinomi si avrebbe che: $\frac{5x^4 - 3x + 1}{x^2 - 4} = 5x^2 + 20 + \frac{-3x + 81}{x^2 - 4}$ e quindi l'integrale diventa:

$$\int \frac{5x^4 - 3x + 1}{x^2 - 4} dx = \int (5x^2 + 20) dx + \int \frac{-3x + 81}{x^2 - 4} dx$$

Il primo dei due integrali si risolve facilmente, mentre il secondo è un integrale del tipo (2) che ci siamo proposti di risolvere.

INTEGRALE DI TIPO (1)

Supponiamo che il polinomio a denominatore sia di I grado, allora a numeratore ci sarà una costante e l'integrale è del tipo:

$$\int \frac{k}{ax+b} dx$$

Con opportuni "aggiustamenti" l'integrale si risolve facilmente:

$$\int \frac{k}{ax+b} dx = k \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{k}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx = \frac{k}{a} \log |ax+b| + k$$

Esempio 3. Risolvere il seguente integrale: $\int \frac{-2}{3x-1} dx = -2 \int \frac{1}{3x-1} dx = -\frac{2}{3} \int \frac{3}{3x-1} dx = -\frac{2}{3} \log |3x-1| + k$

Esercizio 1. Risolvere i seguenti integrali: $\int \frac{4}{-x+1} dx$; $\int \frac{-5}{2x+1} dx$; $\int \frac{7}{7x+6} dx$

2 CASO

Supponiamo che il polinomio a denominatore sia di II grado, allora gli integrali da studiare sono i seguenti:

$$(1) \quad \int \frac{k}{ax^2 + bx + c} dx; \quad (2) \quad \int \frac{hx + k}{ax^2 + bx + c} dx$$

Osservazione 2. Per l'integrale di tipo (2) è utile osservare se al numeratore compare la derivata del denominatore. Se così fosse l'integrale si risolve immediatamente. Fatta questa osservazione in seguito supporremo che per l'integrale (2) non si verifichi la condizione che il numeratore coincida con la derivata del denominatore.

Esempio 4. Calcolare il seguente integrale: $\int \frac{6x-2}{3x^2-2x+1} dx$. Essendo il numeratore la derivata del denominatore, allora l'integrazione della funzione è immediata: $\int \frac{6x-2}{3x^2-2x+1} dx = \log|3x^2-2x+1| + k$.

Esercizio 2. Risolvere i seguenti integrali: $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx$; $\int \frac{18x-6}{9x^2-6x+1} dx$; $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+4} dx$

In generale bisogna distinguere tre sottocasi a seconda che il discriminante del polinomio a denominatore sia positivo, nullo o negativo.

(a) Discriminante del polinomio a denominatore positivo.

In questo caso il polinomio a denominatore si scompone nel seguente modo: $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, essendo x_1 e x_2 radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

Si vuole risolvere un Integrale del tipo (1), ad esempio $\int \frac{-3}{2x^2+3x-2} dx$. Il polinomio a denominatore avendo il discriminante positivo e le radici $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = 2$, si scompone nel seguente modo $2x^2+3x-2 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2) = (2x-1)(x+2)$. La funzione integranda diventa $\frac{-3}{2x^2+3x-2} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+2Bx-B}{(2x-1)(x+2)} = \frac{(A+2B)x+2A-B}{(2x-1)(x+2)}$, per il principio di identità dei polinomi si ottiene: $\begin{cases} A+2B=0 \\ 2A-B=-3 \end{cases}$, risolvendo il sistema si ottiene $A = -\frac{6}{5}$ e $B = \frac{3}{5}$. L'integrale si risolve facilmente:

$$\begin{aligned} \int \frac{-3}{2x^2+3x-2} dx &= \int \left(\frac{-\frac{6}{5}}{2x-1} + \frac{\frac{3}{5}}{x+2} \right) dx = -\frac{6}{5} \int \frac{1}{2x-1} dx + \frac{3}{5} \int \frac{1}{x+2} dx = \\ &= -\frac{3}{5} \int \frac{2}{2x-1} dx + \frac{3}{5} \int \frac{1}{x+2} dx = -\frac{3}{5} \log|2x-1| + \frac{3}{5} \log|x+2| + k. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Risolvere i seguenti integrali: $\int \frac{2}{x^2+x-2} dx$; $\int \frac{4}{3x^2-x-2} dx$.

Si vuole risolvere un integrale del tipo (2), ad esempio $\int \frac{3x+2}{x^2-6x+8} dx$. Il polinomio a denominatore avendo il discriminante positivo e le radici $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$, si scompone nel

seguendo modo $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$. La funzione integranda diventa $\frac{3x + 2}{x^2 - 6x + 8} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 4} = \frac{Ax - 4A + Bx - 2B}{(x - 2)(x - 4)} = \frac{(A + B)x - 4A - 2B}{(2x - 1)(x + 2)}$, per il principio di identità dei polinomi si ottiene: $\begin{cases} A + B = 3 \\ -4A - 2B = 2 \end{cases}$, risolvendo il sistema si ottiene $A = -4$ e $B = 7$. L'integrale si risolve facilmente:

$$\int \frac{3x + 2}{x^2 - 6x + 8} dx = \int \left(\frac{-4}{x - 2} + \frac{7}{x - 4} \right) dx = -4 \int \frac{1}{x - 2} dx + 7 \int \frac{1}{x - 4} dx = -4 \log |x - 2| + 7 \log |x - 4| + k.$$

Esercizio 4. Risolvere i seguenti integrali: $\int \frac{x + 3}{x^2 - 3x + 2} dx$; $\int \frac{3x - 2}{2x^2 + x - 3} dx$.

(b) Discriminante del polinomio a denominatore nullo.

In questo caso il polinomio a denominatore si scompone nel seguente modo: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$, essendo $x_1 = x_2$ radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

Si vuole risolvere un Integrale del tipo (1), ad esempio $\int \frac{-3}{4x^2 - 4x + 1} dx$. Il polinomio a denominatore avendo il discriminante nullo e le radici $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, si scompone nel seguente modo $4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = (2x - 1)^2$. La funzione integranda diventa $\frac{-3}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{-3}{(2x - 1)^2}$. L'integrale si risolve facilmente:

$$\begin{aligned} \int \frac{-3}{4x^2 - 4x + 1} dx &= \int \frac{-3}{(2x - 1)^2} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{2}{(2x - 1)^2} dx = \\ &= -\frac{3}{2} \int 2(2x - 1)^{-2} dx = \frac{3}{2} (2x - 1)^{-1} + k = \frac{3}{2(2x - 1)} + k. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Risolvere i seguenti integrali: $\int \frac{3}{x^2 - 6x + 9} dx$; $\int \frac{-4}{9x^2 + 12x + 4} dx$.

Si vuole risolvere un Integrale del tipo (2), ad esempio $\int \frac{5x + 2}{9x^2 - 12x + 4} dx$. Il polinomio a denominatore avendo il discriminante nullo e le radici $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$, si scompone nel seguente modo $9x^2 - 12x + 4 = 9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = (3x - 2)^2$. La funzione integranda diventa $\frac{5x + 2}{9x^2 - 12x + 4} = \frac{A}{3x - 2} + \frac{B}{(3x - 2)^2} = \frac{3Ax - 2A + B}{(3x - 2)^2}$, per il principio di identità dei polinomi si ottiene: $\begin{cases} 3A = 5 \\ -2A + B = 2 \end{cases}$, risolvendo il sistema si ottiene $A = \frac{5}{3}$ e $B = \frac{16}{3}$. L'integrale si risolve facilmente:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x + 2}{9x^2 - 12x + 4} dx &= \int \left(\frac{\frac{5}{3}}{3x - 2} + \frac{\frac{16}{3}}{(3x - 2)^2} \right) dx = \frac{5}{3} \int \frac{1}{3x - 2} dx + \frac{16}{3} \int \frac{1}{(3x - 2)^2} dx = \\ &= \frac{5}{9} \int \frac{3}{3x - 2} dx + \frac{16}{9} \int \frac{3}{(3x - 2)^2} dx = \\ &= \frac{5}{9} \log |3x - 2| - \frac{16}{9} \frac{1}{3x - 2} + k \end{aligned}$$

Esercizio 6. Risolvere i seguenti integrali: $\int \frac{3x + 1}{x^2 - 8x + 16} dx$; $\int \frac{-5x + 2}{16x^2 - 24x + 9} dx$.

(c) Discriminante del polinomio a denominatore negativo.

Questa eventualità è più delicata, ma allo stesso modo si risolve senza notevoli difficoltà. In questo caso il polinomio a denominatore si scompone nel seguente modo:

Dedichiamoci all'integrale di tipo (1) ovvero $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$ con $\Delta < 0$.

$$\text{Possiamo scrivere } ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\sqrt{a}} \right)^2 = \left(\frac{2ax + b}{2\sqrt{a}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\sqrt{a}} \right)^2.$$

A questo punto la questione è risolta perchè è sufficiente ricordare che:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + k$$

Il nostro scopo è risolvere il seguente integrale: $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$, con il trinomio a denominatore avente discriminante negativo e poi vedremo come in generale sia semplice calcolare gli integrali di tipo (1) e (2). Tenendo conto delle relazioni precedenti si ha:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx &= \int \frac{1}{\left(\frac{2ax + b}{2\sqrt{a}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\sqrt{a}} \right)^2} dx = \int \frac{\frac{4a}{-\Delta}}{1 + \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2} dx = \\ &= \int \frac{\frac{4a}{-\Delta} \cdot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}}{1 + \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2} dx \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} \right) = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctg \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} \right) + k. \end{aligned}$$

Si vuole risolvere un Integrale del tipo (1), ad esempio $\int \frac{-2}{x^2 + x + 1} dx$. Il polinomio a denominatore avendo il discriminante negativo $\Delta = -3$, allora l'integrale indefinito diventa:
 $\int \frac{-2}{x^2 + x + 1} dx = -\frac{4}{3} \sqrt{3} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + k.$

Esercizio 7. Risolvere i seguenti integrali: $\int \frac{2}{x^2 + x + 3} dx$; $\int \frac{-3}{x^2 + 5} dx$.

Si vuole risolvere un integrale del tipo (2), ad esempio $\int \frac{3x+1}{x^2+x+2} dx$, la funzione integranda diventa:

$\frac{3x+1}{x^2+x+2} = \frac{A(2x+1)+B}{x^2+x+2} = \frac{2Ax+A+B}{x^2+x+2}$, per il principio di identità dei polinomi si ottiene: $\begin{cases} 2A=3 \\ A+B=1 \end{cases}$, risolvendo il sistema si ottiene $A = \frac{3}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. L'integrale si risolve facilmente:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+x+2} dx = \int \left(\frac{\frac{3}{2}(2x+1)}{x^2+x+2} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+x+2} \right) dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+1)}{x^2+x+2} dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+x+2} dx.$$

Il primo dei due integrali si integra facilmente perchè a numeratore compare la derivata del denominatore, mentre il secondo si integra con la tecnica appena esposta.

Esercizio 8. Risolvere i seguenti integrali: $\int \frac{2x-3}{x^2+2x+4} dx$; $\int \frac{-x-3}{x^2+5} dx$.