

Le funzioni monotone

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola

30 Settembre 2025

Supponiamo di avere una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $A \subseteq X$.

Definizione 1 Diremo che la funzione f è crescente in A se $\forall x, y \in A$ con $x < y$ si ha che $f(x) \leq f(y)$.

Insomma il grafico di una funzione crescente può avere dei tratti dove è costante, il grafico di una funzione crescente può essere fatto nel seguente modo:

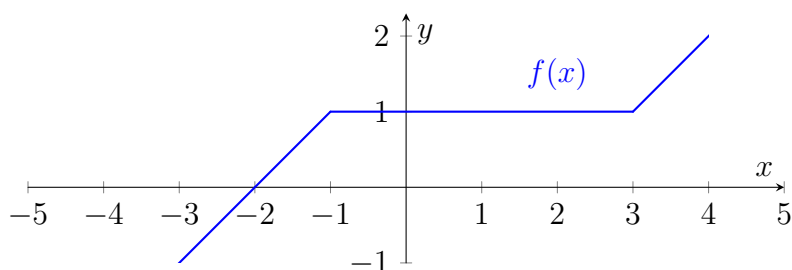


Figura 1: Grafico di una funzione crescente

Definizione 2 Diremo che la funzione f è strettamente crescente in A se $\forall x, y \in A$ con $x < y$ si ha che $f(x) < f(y)$.

Tra le funzioni elementari che abbiamo preso in considerazione possiamo dire che la funzione quadratica $f(x) = x^2$ è strettamente crescente in $A = [0, +\infty)$. Un altro esempio di funzione strettamente crescente è la funzione $f(x) = a^x$ con $a > 1$ nel suo dominio $X = \mathbb{R}$. Un altro esempio di funzione strettamente crescente in $A = X = \mathbb{R}$ è la funzione $f(x) = 2x + 1$ (trattasi del grafico di una retta).

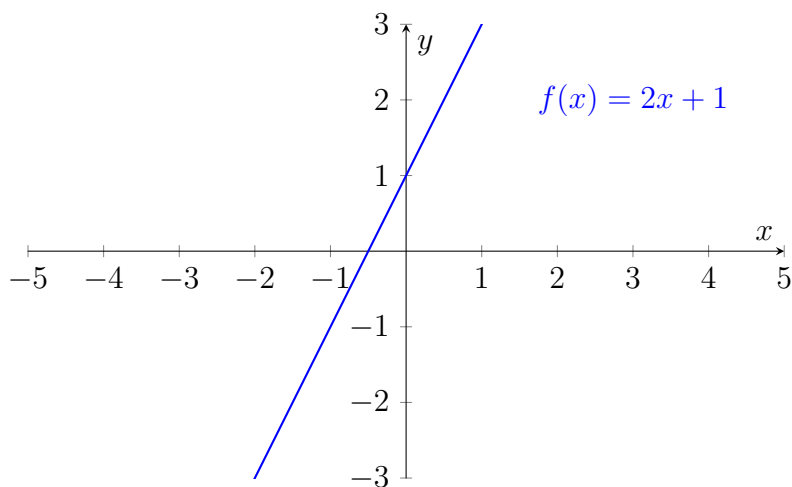


Figura 2: Il grafico di una funzione strettamente crescente

Definizione 3 Diremo che la funzione f è decrescente in A se $\forall x, y \in A$ con $x < y$ si ha che $f(x) \geq f(y)$.

Insomma il grafico di una funzione decrescente può avere dei tratti dove è costante, il grafico di una funzione decrescente può essere fatto nel seguente modo:

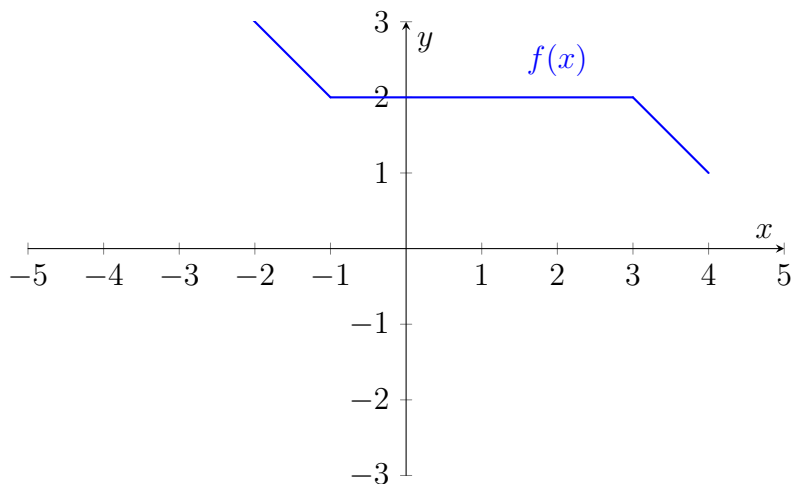


Figura 3: Grafico di una funzione decrescente

Definizione 4 Diremo che la funzione f è strettamente decrescente in A se $\forall x, y \in A$ con $x < y$ si ha che $f(x) > f(y)$.

Tra le funzioni elementari che abbiamo preso in considerazione possiamo dire che la funzione logaritmica $f(x) = \log_a x$ con $0 < a < 1$ è strettamente decrescente in $A = X = (0, +\infty)$. Un altro esempio di funzione strettamente decrescente in $A = X = \mathbb{R}$ è la funzione $f(x) = -3x + 2$ (trattasi del grafico di una retta).

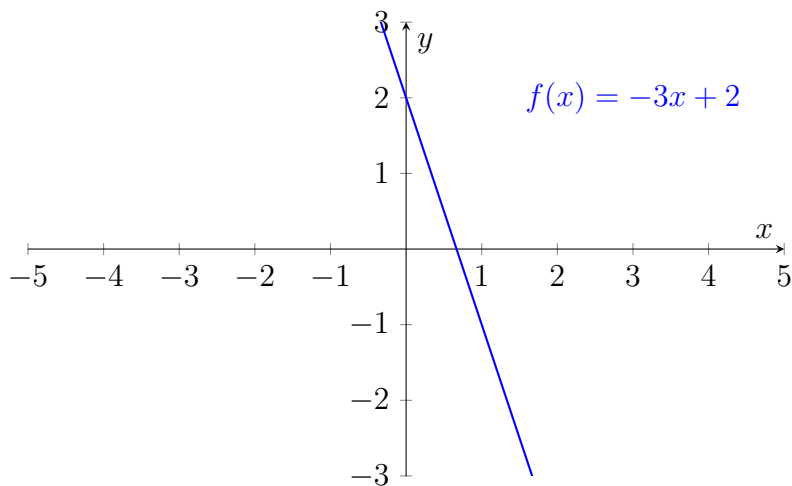


Figura 4: Il grafico di una funzione strettamente decrescente

Osservazione 1 Voglio osservare che taluni autori utilizzano il termine non decrescente come sinonimo di crescente e la locuzione crescente come sinonimo di strettamente crescente, il termine non crescente come sinonimo di decrescente e la locuzione decrescente come sinonimo di strettamente decrescente, dunque fate attenzione quando leggete nei vari testi! Una funzione crescente, strettamente crescente, decrescente o strettamente decrescente si dice una funzione monotona. Attenzione che tali locuzioni sono fortemente legate all'insieme $A \subseteq X$ a cui si riferisce. Per esempio la funzione $f(x) = \sin x$ non è un funzione monotona in $A = \mathbb{R}$ e di certo essa è strettamente crescente in $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.