

Funzioni continue e algebra dei limiti

F. Fernicola

8 Novembre 2025

Iniziamo con introdurre un concetto importante, il concetto di *funzione continua*. Le funzioni continue sono poi in sostanza quelle con le quali abbiamo familiarizzato all'inizio di questo percorso. Vista l'importanza diamo la seguente:

Definizione 1 Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in x_0 se accadono queste cose:

- 1) Esiste $f(x_0)$
- 2) Esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- 3) Si verifica che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Osserviamo che x_0 è un punto del dominio X di f e deve essere anche punto di accumulazione per poter calcolare il limite. Il limite in x_0 della f deve coincidere con il valore $f(x_0)$ e come già sottolineato in precedenza in simboli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definizione 2 Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in X se è continua in ogni punto di X

Esempio 1 Tutte le funzioni elementari che abbiamo evidenziato nel passato sono continue nel loro dominio X . Per le funzioni f continue calcolare il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ equivale a calcolare $f(x_0)$.

Osservazione 1 Ricordiamoci per il futuro esiste un altro modo per esprimere la continuità in un punto x_0 di una funzione f . Prendiamo in considerazione la scrittura $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, se noi introduciamo una variabile ausiliare $h = x - x_0$ ovvero $x = h + x_0$; siamo tutti d'accordo che se $x \rightarrow x_0$, allora $h \rightarrow 0$ e quindi possiamo scrivere $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ come $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. Ricordiamo per il futuro e lo metto in posizione centrale:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

Abbandoniamo le funzioni continue riprendiamo il discorso per le funzioni che sono definite in $\hat{I}(x_0)$. Osserviamo che le funzioni continue sono funzioni che ammettono limite e quindi quello che noi stiamo per dire vale anche per loro.

Ci limitiamo a riportare questa proposizione senza dimostrazione, peraltro non difficile, ma diciamo che tale proposizione e la relativa conoscenza del contenuto ci permetteranno finalmente di operare con i limiti.

Come al solito supponiamo che $f, g : \widehat{I}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, vuol dire che queste funzioni sono definite in $I(x_0)$ eccetto al più il punto x_0 . Il punto $x_0 \in \widehat{\mathbf{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e supponiamo $l_1, l_2 \in \widehat{\mathbf{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Vale la seguente:

Proposizione 3 Sia $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$, allora vale quanto segue:

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = l_1 - l_2$

c) $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l_1|$

d) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l_1 \cdot l_2$

e) $\lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot f(x) = k \cdot l_1$ con $k \in \mathbb{R}$

f) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_1}$ se $l_1 \neq 0$

g) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty$

h) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$ quando ovviamente $l_2 \neq 0$

j) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = l_1^{l_2}$ con $f(x) > 0$. Ricordiamo che $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$

Tavola operazione addizione

+	$-\infty$	l_2	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	<i>BOH</i>
l_1	$-\infty$	$l_1 + l_2$	$+\infty$
$+\infty$	<i>BOH</i>	$+\infty$	$+\infty$

La forma $-\infty + \infty$ o lo stesso $+\infty - \infty$ sono forme indeterminate e sulle quali non si può decidere nulla a priori e in tal caso il limite può valere $-\infty$, $+\infty$, l oppure non esiste. Vediamo con degli esempi:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2}{x^2} = -\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0} 2 - \frac{3}{x^2} = -\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{x^2} + 2 - \frac{3}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2}{x^2} = -\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} = -\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \nexists$.

Tavola operazione moltiplicazione

$\cdot$	$-\infty$	$l_2 < 0$	0	$l_2 > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	<i>BOH</i>	$-\infty$	$-\infty$
$l_1 < 0$	$+\infty$	$l_1 \cdot l_2$	0	$l_1 \cdot l_2$	$-\infty$
0	<i>BOH</i>	0	0	0	<i>BOH</i>
$l_1 > 0$	$-\infty$	$l_1 \cdot l_2$	0	$l_1 \cdot l_2$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	<i>BOH</i>	$+\infty$	$+\infty$

La forma $0 \cdot \pm\infty$ o lo stesso $\pm\infty \cdot 0$ sono forme indeterminate e sulle quali non si può decidere nulla a priori e in tal caso il limite può vale $-\infty$, $+\infty$, l oppure non esiste. Vediamo con degli esempi il caso $0 \cdot +\infty$ (idem per $0 \cdot -\infty$):

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow 0} \left[-x^2 \cdot \frac{1}{x^4} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} = +\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \cdot \frac{3}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} 3 = 3$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \cdot \frac{1}{x^4} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^4} = +\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cdot \frac{|x|}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \nexists$.

Tavola operazione divisione

$/$	$-\infty$	$l_2 < 0$	0^-	0^+	$l_2 > 0$	$+\infty$
$-\infty$	<i>BOH</i>	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	<i>BOH</i>
$l_1 < 0$	$+\infty$	$\frac{l_1}{l_2}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{l_1}{l_2}$	0^-
0^-	0^+	0^+	<i>BOH</i>	<i>BOH</i>	0^-	0^-
0^+	0^-	0^-	<i>BOH</i>	<i>BOH</i>	0^+	0^+
$l_1 > 0$	0^-	$\frac{l_1}{l_2}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{l_1}{l_2}$	0^+
$+\infty$	<i>BOH</i>	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	<i>BOH</i>

Osservazione 2 Per la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ provate voi a trovare degli esempi.

Osservazione 3 Per la forma indeterminata $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ provate voi a trovare degli esempi.

Quello che tengo a precisare che nel calcolare i limiti adotteremo delle tecniche per superare l'ostacolo delle forme indeterminate, che per importanza richiamo:

$$(1) \quad (+\infty) + (-\infty) \quad (2) \quad 0 \cdot \pm\infty \quad (3) \quad \frac{0}{0} \quad (4) \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$(5) \quad (0^+)^0 \quad (6) \quad 1^{\pm\infty} \quad (7) \quad (+\infty)^0$$

Ora vogliamo fare delle considerazioni su queste forme indeterminate che possono essere utili quando parleremo del *Teorema di de l'Hôpital*. Sono convinto che ritornerete a rileggere questa nota e in particolare la parte che segue nel futuro, potete mettere qui un bel segnale!!!.

Se $\frac{f}{g}$ rappresenta $\frac{0}{0}$, allora $f \cdot \frac{1}{g}$ diventa la forma indeterminata $0 \cdot \pm\infty$.

Se $f \cdot g$ rappresenta $0 \cdot \pm\infty$, allora $\frac{f}{\frac{1}{g}}$ diventa la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Se $f + g$ rappresenta $(+\infty) + (-\infty)$, allora $\frac{\frac{1}{g} + \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}$ diventa la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Se $\frac{f}{g}$ rappresenta $\frac{0}{0}$, allora $\frac{\frac{1}{g}}{\frac{1}{f}}$ diventa la forma indeterminata $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Se $\frac{f}{g}$ rappresenta $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, allora $\frac{\frac{1}{g}}{\frac{1}{f}}$ diventa la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Analizziamo da dove nasce la (5), sappiamo che $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$, ora $e^{0 \cdot \ln 0^+} = e^{0 \cdot (-\infty)} = e^{\text{forma indeterminata}}$, dunque forma indeterminata $0 \cdot (-\infty)$ che nasce da $(0^+)^0$.

Analizziamo da dove nasce la (6), sappiamo che $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$, ora $e^{\pm\infty \cdot \ln 1} = e^{\pm\infty \cdot 0} = e^{\text{forma indeterminata}}$, dunque forma indeterminata $\pm\infty \cdot 0$ che nasce da $1^{\pm\infty}$.

Analizziamo da dove nasce la (7), sappiamo che $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$, ora $e^{0 \cdot \ln(+\infty)} = e^{0 \cdot (+\infty)} = e^{\text{forma indeterminata}}$, dunque forma indeterminata $0 \cdot (+\infty)$ che nasce da $(+\infty)^0$.

Osservazione 4 *Preciso che quando un limite si presentata in forma indeterminata non significa che il limite non si può calcolare, vuol dire che bisogna adottare altre tecniche per vedere se il limite vale $-\infty$, l , $+\infty$ oppure $\nexists$. Ad esempio il $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1^{\pm\infty}$ e quindi si presenta in forma indeterminata, noi però dimostreremo che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ che è il Numero di Nepero dove $e \cong 2.71828$ ed è la ben nota base dei logaritmi Neperiani.*