

Esercizio 1. Dimostra che la funzione $f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$ è dispari.

Svolgimento

Siccome ci chiede di dimostrare che è dispari l'autore dà per scontato che il dominio X sia simmetrico rispetto a 0. Noi non ci fidiamo e lo vogliamo determinare:
$$\begin{cases} 4x^2 + 1 \geq 0 \\ 2x + \sqrt{4x^2 + 1} > 0 \end{cases}.$$

Dalla D_1 sappiamo che $4x^2 + 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dalla D_2 sappiamo che $\sqrt{4x^2 + 1} > -2x$. Ragioniamo, se $x = 0$ la disequazione è vera. Se $x < 0$ entrambi i membri sono positivi e possiamo elevare al quadrato ottenendo una disequazione vera $\forall x \in \mathbb{R}$. Se $x > 0$ il primo membro è positivo e il secondo membro è negativo ottenendo una disequazione vera $\forall x \in \mathbb{R}$. Conclusione il dominio della funzione è $X = \mathbb{R}$ banalmente simmetrico rispetto a 0.

Vediamo la questione chiesta ovvero che la funzione è dispari.

Noi sappiamo che f è dispari se $f(-x) = -f(x)$ (equivalentemente $f(x) = -f(-x)$).

Calcoliamo $f(-x) = \ln(-2x + \sqrt{4x^2 + 1})$. Ora proviamo a calcolare $-f(-x) = -\ln(-2x + \sqrt{4x^2 + 1})$, lavoriamo sul secondo membro:

$$\begin{aligned} -f(-x) &= -\ln(-2x + \sqrt{4x^2 + 1}) = \text{ora applichiamo la regola } n \ln x = \ln x^n \text{ con } n = -1 = \\ &= \ln(-2x + \sqrt{4x^2 + 1})^{-1} = \ln\left(\frac{1}{-2x + \sqrt{4x^2 + 1}}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{1}{-2x + \sqrt{4x^2 + 1}} \cdot \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}}\right) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) = f(x) \implies f(x) = -f(-x) \text{ e concludiamo} \\ &\text{che la funzione è dispari.} \end{aligned}$$