

Dopo aver determinato il valore  $a$  per il quale la retta  $y = x$  è asintoto obliquo destro per la funzione  $f(x) = \frac{xe^x + 3x}{ae^x - x - 1}$ , per tale valore di  $a$ :

- a) Studia il segno di  $f(x)$ ;
- b) Individua i punti di singolarità;
- c) Calcola il  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ;
- d) Traccia il grafico probabile.

### Svolgimento premessa)

Siccome la retta  $y = x$  deve essere asintoto obliquo destro vuol dire che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  in quanto deve essere pari a  $m = 1$  coefficiente angolare della retta  $y = x$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{ae^x - x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{ae^x - x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 + \frac{3}{e^x}\right)}{e^x \left(a - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{e^x}\right)}{\left(a - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1}{a} = 1 \implies a = 1. \end{aligned}$$

La funzione da prendere in considerazione è  $f(x) = \frac{xe^x + 3x}{e^x - x - 1}$ .

### 1° Passo: Dominio

$e^x - x - 1 \neq 0$ . Intanto ci chiediamo quando  $e^x - x - 1 = 0 \iff e^x = x + 1$ . Quest'ultima è un'equazione trascendente che si può risolvere per via grafica rappresentando i grafici delle due funzioni elementari che entrano in gioco. A sinistra la funzione esponenziale  $h_1(x) = e^x$  e a destra una banale funzione affine  $h_2(x) = x + 1$ . Entrambi le funzioni uno studente le rappresenta facilmente:

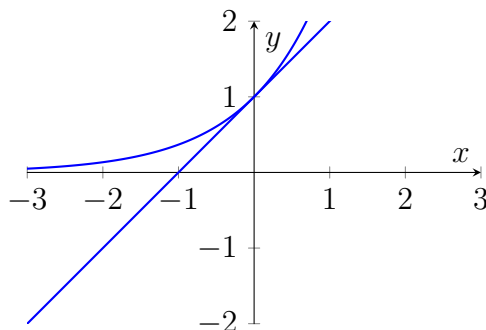


Figura 1: Risoluzione di un'equazione trascendente con metodo grafico

Dal grafico si evince che l'unico punto in comune ai grafici si ha per  $x = 0$  e quindi il dominio è  $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ . Infatti se ci fate caso ponendo  $x = 0$  il denominatore si annulla.

### Svolgimento a)

$\frac{xe^x + 3x}{e^x - x - 1} \geq 0 \iff \frac{x(e^x + 3)}{e^x - x - 1} \geq 0 \iff x > 0$ . Ad essere sinceri non ci sta nemmeno la necessità di studiare il segno utilizzando il grafico, a numeratore la quantità  $e^x + e > 0 \quad \forall x \in X$  e poi è anche evidente che  $e^x > x + 1 \forall x \in X$ . Possiamo concludere:

$f$  positiva in  $(0, +\infty)$

$f$  negativa in  $(-\infty, 0)$

Osserviamo che non ci sono intersezioni con l'asse  $y$  in quanto  $0 \notin X$ . Lo so che l'ho detto infinite volte, non mi stanco mai di precisarlo ma sarebbe del tutto inutile tale zelo.

### Svolgimento b)

L'unico punto di singolarità su cui indagare è  $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{xe^x + 3x}{e^x - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + 3}{\frac{e^x - 1}{x} - 1}$ , ho diviso numeratore e denominatore per  $x \neq 0$  e quindi  
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + 3}{\frac{e^x - 1}{x} - 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$ . Ho deciso  $0^-$  perché è un suggerimento del segno della funzione a sinistra di 0.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x + 3x}{e^x - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 3}{\frac{e^x - 1}{x} - 1}$ , ho diviso numeratore e denominatore per  $x \neq 0$  e quindi  
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 3}{\frac{e^x - 1}{x} - 1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$ . Ho deciso  $0^+$  perché è un suggerimento del segno della funzione a destra di 0.

Dall'analisi precedente possiamo concludere che  $x = 0$  è un punto singolare di  $II$  specie, siccome esistono divergenze a sinistra e destra trattasi anche di una sintoto verticale di equazione  $x = 0$ .

### Svolgimento c)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x + 3x}{e^x - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(e^x + 3)}{x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3}{\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Vediamo che questo stesso limite lo possiamo calcolando portandolo a  $+\infty$  con la sostituzione  $x = -t$ , vediamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x + 3x}{e^x - x - 1} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-te^{-t} - 3t}{e^{-t} + t - 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t(-e^{-t} - 3)}{t\left(\frac{e^{-t}}{t} + 1 - \frac{1}{t}\right)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-t} - 3}{\left(\frac{e^{-t}}{t} + 1 - \frac{1}{t}\right)} = \frac{-3}{1} = -3. \end{aligned}$$

Possiamo concludere che  $y = -3$  è un asintoto orizzontale sinistro. Per completezza calcoliamo anche  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x + 3x}{e^x - x - 1}$  e andremo a confermare che  $y = x$  è una asintoto obliquo.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x + 3x}{e^x - x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left( x + \frac{3x}{e^x} \right)}{e^x \left( 1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1} = +\infty.$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{e^x - x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left( 1 + \frac{3}{e^x} \right)}{e^x \left( 1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( 1 + \frac{3}{e^x} \right)}{\left( 1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right)} = 1.$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{xe^x + 3x}{e^x - x - 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x + 3x - xe^x + x^2 + x}{e^x - x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x}{e^x - x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left( 1 + \frac{4}{x} \right)}{e^x \left( 1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \cdot \frac{\left( 1 + \frac{4}{x} \right)}{\left( 1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right)} = 0 \cdot 1 = 0.$$

**Svolgimento d)**

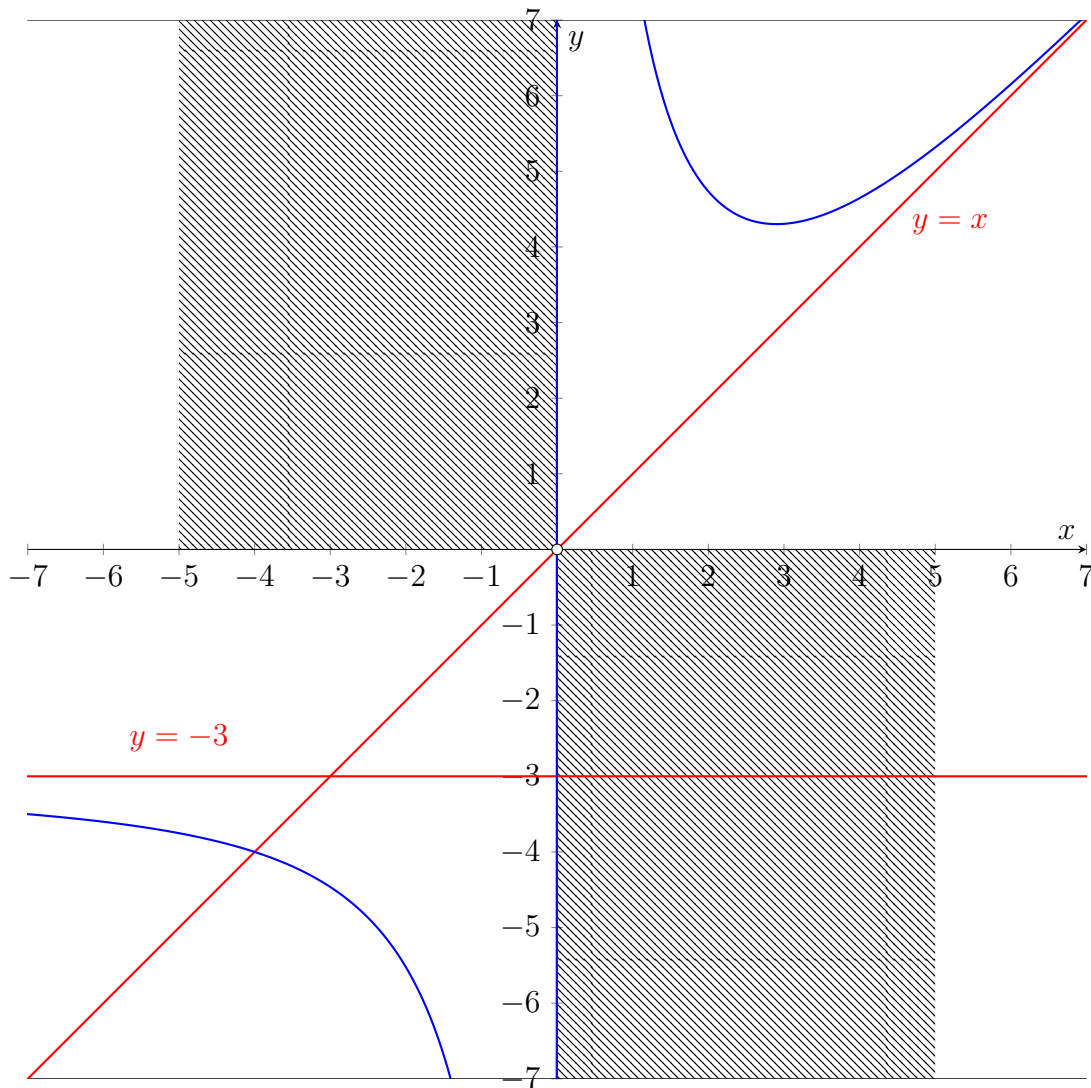


Figura 2: Dati parziali studio del grafico della funzione