

Esercizi svolti su alcuni teoremi delle funzioni continue

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola

17 Dicembre 2025

Teorema degli zeri o di Bolzano

Esempio 1. Verificare se la funzione di seguito indicata relativamente al sottoinsieme di $\mathbb{R}$ soddisfa le condizioni del teorema degli zeri:

$$f(x) = x^3 - x + 1 \qquad I = [0, 2]$$

Svolgimento

a) L'intervallo è chiuso e limitato. Ok!

b) $f(0) = 1 > 0$ e $f(2) = 7 > 0$. No!

Non verifichiamo nemmeno il requisito della continuità (anche se ovvio che è continua trattandosi di una funzione polinomiale), allora possiamo concludere che in $(0, 2)$ non è garantita l'esistenza di uno zero. Potrebbe anche accadere che ci sia, ma le condizioni del teorema non sono tutte verificate e quindi non c'è certezza.

Esempio 2. Verificare se la funzione di seguito indicata relativamente al sottoinsieme di $\mathbb{R}$ soddisfa le condizioni del teorema degli zeri:

$$f(x) = x^3 - x + 1 \qquad I = [-2, 2]$$

Svolgimento

a) L'intervallo è chiuso e limitato. Ok!

b) $f(-2) = -5 < 0$ e $f(2) = 7 > 0$. Ok!

c) La funzione f è una funzione polinomiale continua I . Ok!

Tutte le ipotesi del teorema sono soddisfatte, allora possiamo concludere che esiste almeno un $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$. Osserviamo che il punto c potrebbe essere non unico e il teorema stesso ci garantisce l'esistenza di zeri ma non fornisce informazioni su come determinare tali zeri.

Esempio 3. Verificare se la funzione di seguito indicata relativamente al sottoinsieme di $\mathbb{R}$ soddisfa le condizioni del teorema degli zeri:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + x^2 \qquad I = [-1, 2]$$

Svolgimento

a) L'intervallo è chiuso e limitato. Ok!

b) $f(-1) = \frac{1}{2} > 0$ e $f(2) = 5 > 0$. No!

Non verifichiamo nemmeno il requisito della continuità, possiamo concludere che nei punti interni ad I non è garantita l'esistenza di uno zero.

Esempio 4. Verificare se la funzione di seguito indicata relativamente al sottoinsieme di $\mathbb{R}$ soddisfa le condizioni del teorema degli zeri:

$$f(x) = e^{\frac{x}{1-x}} - x + 1 \quad I = [1, 2]$$

Svolgimento

a) L'intervallo è chiuso e limitato. Ok!

b) La funzione non è definita in $x = 1$

Non verifichiamo nemmeno il requisito agli estremi, possiamo concludere nei punti interni ad I non è garantita l'esistenza di uno zero.

Su questa funzione mi permetterei di fare una mia osservazione per cercare di salvare il salvabile. Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow 1^+} (e^{\frac{x}{1-x}} - x + 1) = e^{-\infty} - 1 + 1 = 0$.

Siamo stati sfortunati perchè essendo $f(2) = \frac{1}{e^2} - 1 < 0$ se il limite fosse stato un numero $l > 0$ si poteva considerare questa funzione:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{1-x}} - x + 1 & 1 < x \leq 2 \\ l & x = 1 \end{cases}$$

In sostanza avremmo prolungato la funzione in $x = 1$ rendendola continua e soddisfaceva tutte le condizioni del teorema degli zeri.

Esempio 5. Verificare se la funzione di seguito indicata relativamente al sottoinsieme di $\mathbb{R}$ soddisfa le condizioni del teorema degli zeri:

$$f(x) = \frac{|x^3 - 1|}{x^3 - 1} \quad I = [-1, 2]$$

Svolgimento

a) L'intervallo è chiuso e limitato. Ok!

b) $f(-1) = -1 < 0$ e $f(2) = 1 > 0$. ok!

c) Si verifica facilmente che in che $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^3 - 1|}{x^3 - 1} = -1$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^3 - 1|}{x^3 - 1} = 1$ e quindi la f non è continua in I . Possiamo concludere nei punti interni ad I non è garantita l'esistenza di uno zero.

Esempio 6. Verificare se la funzione di seguito indicata relativamente al sottoinsieme di $\mathbb{R}$ soddisfa le condizioni del teorema degli zeri:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} - x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad I = [-1, 2]$$

Svolgimento

a) L'intervallo è chiuso e limitato. Ok!

b) $f(-1) = e + 1 > 0$ e $f(2) = \frac{1-e}{e} < 0$. Ok!

c) Si verifica facilmente che in che $\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{-\frac{1}{x}} - x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-\frac{1}{x}} - x) = 0$ e quindi la f non è continua in $x = 0$ e quindi non continua in I . Possiamo concludere nei punti interni ad I non è garantita l'esistenza di uno zero.

Teorema di Weierstrass sul minimo e massimo assoluto

Esempio 7. Verificare se la funzione di seguito indicata relativamente al sottoinsieme di $\mathbb{R}$ soddisfa le condizioni del teorema di Weierstrass. Tentare per quanto possibile di individuare il minimo assoluto m e il massimo assoluto M .

$$f(x) = x^3 \qquad I = [-1, 2]$$

Svolgimento

- a) L'intervallo è chiuso e limitato. Ok!
- b) La funzione è continua. Ok!

Non è difficile dimostrare applicando la definizione che la funzione è strettamente crescente, quindi $m = f(-1) = -1$ e $M = f(2) = 8$.

Esempio 8. Verificare se la funzione di seguito indicata relativamente al sottoinsieme di $\mathbb{R}$ soddisfa le condizioni del teorema di Weierstrass. Tentare per quanto possibile di individuare il minimo assoluto m e il massimo assoluto M .

$$f(x) = \sin |x| \qquad I = \left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Svolgimento

- a) L'intervallo è chiuso e limitato. Ok!
- b) La funzione è continua. Ok!

Potremmo fare tanti ragionamenti per determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto. Noi facciamo il seguente: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \in I$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$. Sappiamo che $-1 \leq \sin x \leq 1$ e quindi $m = -1$ e $M = 1$.

Esempio 9. Verificare se la funzione di seguito indicata relativamente al sottoinsieme di $\mathbb{R}$ soddisfa le condizioni del teorema di Weierstrass. Tentare per quanto possibile di individuare il minimo assoluto m e il massimo assoluto M .

$$f(x) = \log_2 |x - 1| \qquad I = [2, 3]$$

Svolgimento

- a) L'intervallo è chiuso e limitato. Ok!
- b) La funzione è continua. Ok!

Osserviamo che la funzione è definita in I . Non è difficile dimostrare applicando la definizione che la funzione è strettamente crescente, quindi $m = f(2) = 0$ e $M = f(3) = 1$.

Teorema dei valori intermedi

Esempio 10. Utilizzando il teorema dei valori intermedi, giustifica perchè la funzione $f(x) = x^3 + 2x$ deve assumere almeno una volta il valore $k = 11$ per qualche $x \in [1, 2]$.

Svolgimento

- a) L'intervallo è chiuso e limitato. Ok!
- b) La funzione è continua. Ok!

Cerchiamo di determinare m e M . Non è difficile dimostrare applicando la definizione che la funzione è strettamente crescente, dunque $m = f(1) = 3$ e $M = f(2) = 12$ e quindi $k \in (3, 12)$ esiste $c \in (1, 2)$ con $f(c) = 11$.

Esempio 11. Utilizzando il teorema dei valori intermedi, dimostrare che $k = 3$ è un valore assunto dalla funzione $f(x) = x^2 + 1$ nell'intervallo $I = [-2, 3]$

Svolgimento

- a) L'intervallo è chiuso e limitato. Ok!
- b) La funzione è continua. Ok!

Cerchiamo di determinare m e M . Il grafico di f è quello di una parabola convessa e vertice in $V \equiv (0, 1)$ ovvio che $f(0) = 1 = m$ e $f(3) = 10 = M$, per il Teorema dei valori intermedi possiamo dire che $1 \leq f(x) \leq 10$ e quindi esiste $c \in [-2, 3]$ con $f(c) = 3$.

Esempio 12. Utilizzando il Teorema dei valori intermedi dimostrare che l'equazione $x^2 + \ln(2x) - 2 = 0$ ammette almeno una soluzione.

Svolgimento

Se noi consideriamo la funzione $f(x) = x^2 + \ln(2x)$, dobbiamo provare che tale funzione assume il valore 2 in un opportuno intervallo. Non è difficile provare che è strettamente crescente per $x > 0$. In un qualsiasi intervallo $[a, b]$ si ha $m = f(a)$ e $M = f(b)$, allora basta scegliere $[a, b]$ con $f(a) < 2 < f(b)$. Osserviamo che $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} < 2$ e $f(2) = 4 + \ln 4 > 2$. Possiamo concludere che in $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ si trova $m = \frac{1}{4}$ e $M = 4 + \ln 4$. Nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ vale il Teorema dei valori intermedi e quindi con $2 \in \left(\frac{1}{4}, 4 + \ln 4\right)$ esiste $c \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ con $f(c) = 2$.