

Discontinuità e Singolarità di una funzione in $x_0 \in \mathbb{R}$

F. Fernicola

10 Novembre 2025

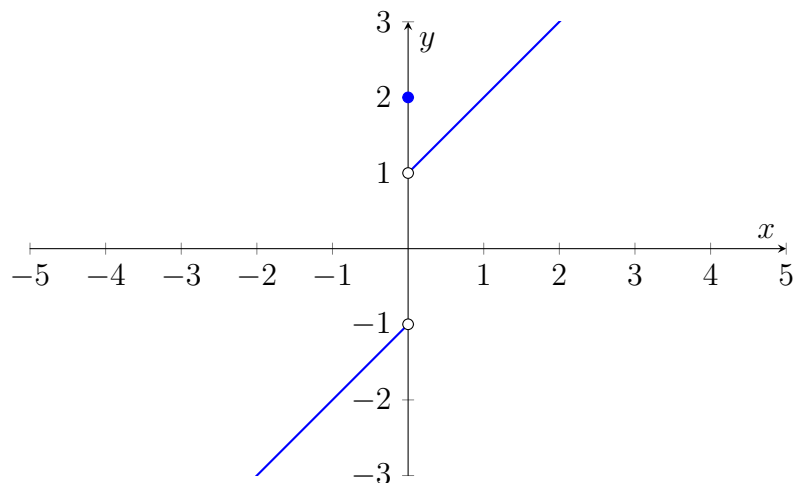
Come al solito supponiamo che $f : \hat{I}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, vuol dire che questa funzione è definita in $I(x_0)$ eccetto al più il punto x_0 . Ci tengo a precisare e dovete ricordare la condizione che il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e quindi il limite si faccia in un punto al finito, escludiamo che $x_0 = -\infty$ oppure $x_0 = +\infty$.

Definizione 1 Diremo che la funzione f presenta una Discontinuità di Prima Specie in x_0 se accadono le seguenti cose:

- 1) La funzione è definita in x_0 , dunque esiste $f(x_0)$
- 2) Esiste $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, esiste $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$
- 3) I due limiti finiti l_1 e l_2 sono distinti, ovvero $l_1 \neq l_2$

Esempio 1 Consideriamo la funzione $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ x-1 & x < 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

Questa è una funzione che ammette una Discontinuità di Prima Specie in $x_0 = 0$, infatti essa è definita in 0 in quanto $f(0) = 2$, abbiamo anche $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, i due limiti finiti sono distinti. Il grafico della funzione in esame è il seguente:



Osservazione 1 Questa stessa funzione non definita in $x_0 = 0$ con la stessa legge analitica si dice che presenta una Singolarità di Prima Specie in $x_0 = 0$. Dunque la differenza tra Discontinuità e Singolarità è che quando si parla di Discontinuità la f è definita in x_0 e nella Singolarità la f non è definita in x_0 , fermo restando che le altre condizioni restano invariate.

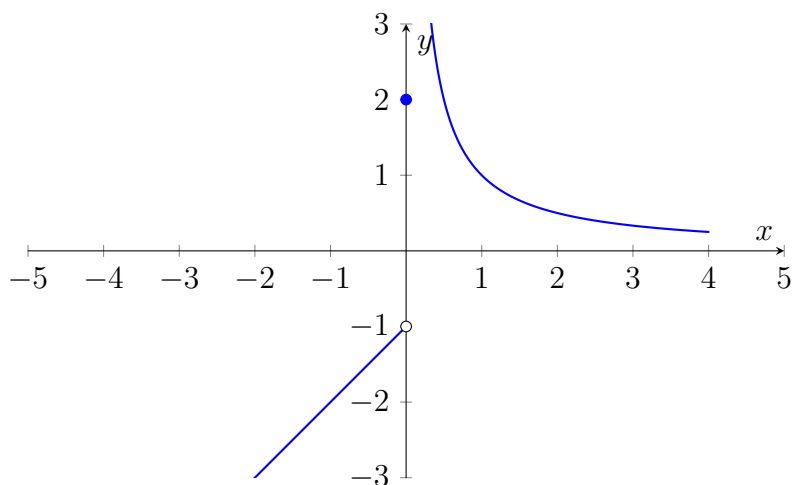
Osservazione 2 Se una funzione presenta una Discontinuità o Singolarità di Prima Specie sappiamo che limite sinistro e limite destro sono entrambi finiti ma distinti. La differenza in valore assoluto dei limiti ovvero la quantità $\Delta = |l_1 - l_2|$ si dice salto della funzione e non ci vuole molto per comprendere l'uso di tale locuzione se guardiamo cosa accade alla funzione nell'intorno di x_0 . Nel precedente esempio il salto della funzione in $x_0 = 0$ vale $\Delta = 2$.

Definizione 2 Diremo che la funzione f presenta una Discontinuità di Seconda Specie in x_0 se accadono le seguenti cose:

- 1) La funzione è definita in x_0 , dunque esiste $f(x_0)$
- 2) Almeno uno dei due limiti $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ o non esiste o vale $\pm\infty$ (quest'ultima scrittura significa che vale $-\infty$ aut $+\infty$).

Esempio 2 Consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x - 1 & x < 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

Questa è una funzione che ammette una Discontinuità di Seconda Specie in $x_0 = 0$, infatti essa è definita in 0 in quanto $f(0) = 2$, abbiamo anche $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Il grafico della funzione in esame è il seguente:



Osservazione 3 Questa stessa funzione non definita in $x_0 = 0$ con la stessa legge analitica si dice che presenta una Singularità di Seconda Specie in $x_0 = 0$. Dunque la differenza tra Discontinuità e Singularità è che quando si parla di Discontinuità la f è definita in x_0 e nella Singularità la f non è definita in x_0 , fermo restando che le altre condizioni restano invariate.

Osservazione 4 Per una funzione che non è continua in un punto x_0 , se consideriamo le possibilità del risultato di un limite $-\infty$, l_1 , $+\infty$ e $\nexists$ possiamo dire che su 16 possibilità solo 2 sono sfavorevoli ad una Discontinuità o Singularità di Seconda Specie, tra le 16 possibili coppie che scaturiscono tra limite sinistro e limite destro tutte vanno bene tranne (l_1, l_1) entrambi finiti. Nel punto x_0 si ha una Discontinuità o Singularità di Seconda Specie tranne quando la coppia di limiti $\left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right)$ siano entrambi finiti; nel caso siano distinti ovvero $l_1 \neq l_2$ siamo in presenza di Discontinuità o Singularità di Prima Specie, al contrario quando $l_1 = l_2$ si avrà una discontinuità della quale parleremo nella prossima definizione.

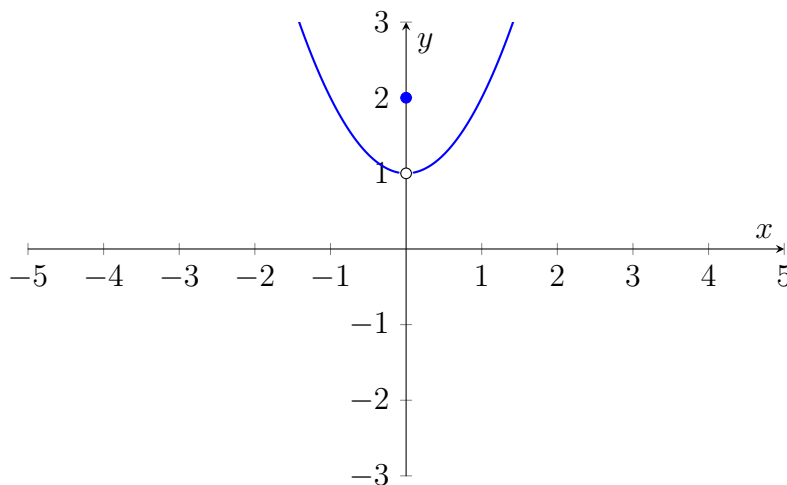
Discontinuità o Singularità	$-\infty$	l_2	$+\infty$	$\nexists$
$-\infty$	II^a	II^a	II^a	II^a
$+\infty$	II^a	II^a	II^a	II^a
l_1	II^a	I^a o III^a	II^a	II^a
$\nexists$	II^a	II^a	II^a	II^a

Definizione 3 Diremo che la funzione f presenta una Discontinuità di Terza Specie in x_0 se accadono le seguenti cose:

- 1) La funzione è definita in x_0 , dunque esiste $f(x_0)$
- 2) Vale l'uguaglianza tra i due limiti, ovvero $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
- 3) Si ha che $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

Esempio 3 Consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

Questa è una funzione che ammette una Discontinuità di Terza Specie in $x_0 = 0$, infatti essa è definita in 0 in quanto $f(0) = 2$, abbiamo anche $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. Il grafico della funzione in esame è il seguente:



Osservazione 5 Questa stessa funzione non definita in $x_0 = 0$ con la stessa legge analitica si dice che presenta una Singolarità di Terza Specie in $x_0 = 0$. Dunque la differenza tra Discontinuità e Singolarità è che quando si parla di Discontinuità la f è definita in x_0 e nella Singolarità la f non è definita in x_0 , fermo restando che le altre condizioni restano invariate.

Osservazione 6 Se una funzione presenta una Discontinuità o Singolarità di Terza Specie, intanto la funzione ammette limite finito in x_0 ovvero $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

Una tale Discontinuità o Singolarità di Terza Specie viene detta anche

Discontinuità o Singolarità Eliminabile e questo per ovvie ed evidenti ragioni. Nel caso di una Singolarità di Terza Specie la funzione in x_0 non è definita ma ammette limite e quindi definendola in x_0 e ponendo $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ otteniamo una funzione continua. Nel caso di Discontinuità di Terza Specie la funzione essendo definita in x_0 ma con $f(x_0) = m \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ basta modificare il valore $f(x_0) = m$ e porre $f(x_0) = l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e in tal caso si ha una funzione continua. Come nel caso dell'ultimo esempio osserviamo che quella è una Discontinuità Eliminabile in quanto $f(0) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ e quindi noi definiremo una nuova funzione $\bar{f}(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ che in soldoni quest'ultima funzione coincide con la funzione $g(x) = x^2 + 1$.