

Differenziale di una funzione, grafici tangenti e ortogonali

Liceo Assteas -Buccino-

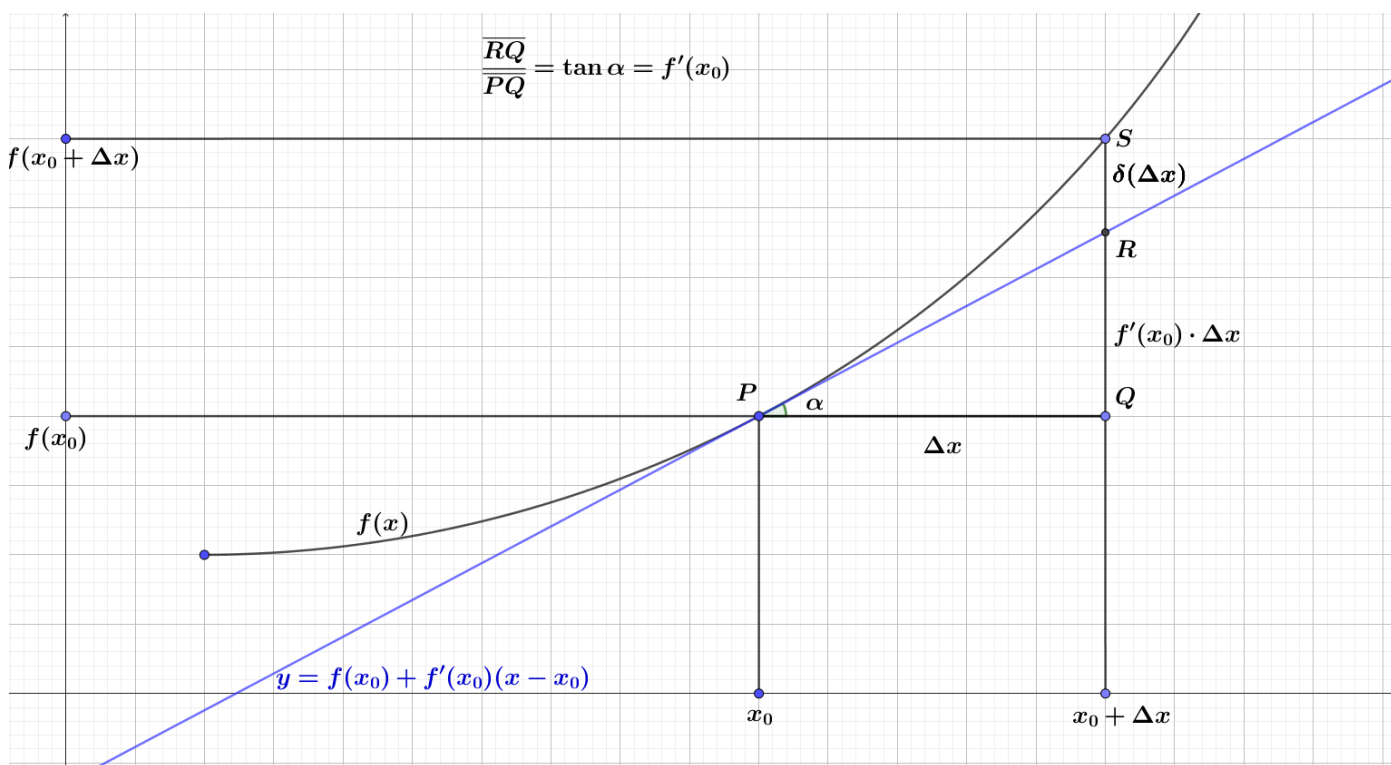
F. Fernicola

13 Febbraio 2026

Supponiamo che $f(x)$ sia una funzione derivabile in un punto x_0 , questo vuol dire che il grafico della funzione ammette retta tangente nel punto $P \equiv (x_0, f(x_0))$ e l'equazione di tale retta è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Il fatto che la funzione sia derivabile in un punto x_0 è davvero interessante perché è possibile in un intorno di x_0 "confondere" il grafico della funzione con quello della retta tangente. In altre parole possiamo sostituire l'espressione $f(x)$ con la funzione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ che è proprio la retta tangente al grafico della funzione. Questa "sostituzione" è possibile in un intorno di x_0 e per convincersi che il tutto è lecito bisogna giustificarlo.



Sia $x = x_0 + \Delta x$ un punto prossimo ad x_0 . Se $\Delta x > 0$ si trova a destra di x_0 e Se $\Delta x < 0$ si trova a sinistra di x_0 , nel nostro esempio prenderemo $\Delta x > 0$. La nostra attenzione è rivolta alla quantità $\overline{RS} = \delta(\Delta x)$, si comprende visivamente e noi lo dimostreremo analiticamente che se Δx "è piccolo", allora $\delta(\Delta x)$ "è ancora più piccolo", insomma dimostreremo che $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\delta(\Delta x)}{\Delta x} = 0$. Vi faccio osservare che abbiamo denotato $\overline{RS}$ con $\delta(\Delta x)$ perchè effettivamente la sua lunghezza dipende da Δx . Non ci sono dubbi che $\overline{RS} = \overline{QS} - \overline{QR}$.

$$\overline{RS} = \delta(\Delta x), \overline{QS} = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ e } \overline{QR} = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

$$\delta(\Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\delta(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Abbiamo dimostrato che $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\delta(\Delta x)}{\Delta x} = 0$, ovvero che $\delta(\Delta x)$ è davvero una quantità infinitesimale, quindi trascurabile. Noi sappiamo che $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \delta(\Delta x)$, visto che $\delta(\Delta x)$ è trascurabile possiamo scrivere:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (1)$$

L'equazione (1) ci dice che in un intorno di x_0 noi possiamo approssimare la funzione con la retta tangente.

Definizione 1. La quantità $f'(x_0) \cdot \Delta x$ si chiama *differenziale di f relativo a x_0 e all'incremento Δx* e si scrive $df(x_0) = f'(x_0) \Delta x$. Osserviamo che se consideriamo la funzione $f(x) = x$, allora $df(x) = dx = 1 \cdot \Delta x$ ovvero $dx = \Delta x$. Quindi possiamo dire che il differenziale di una funzione in un punto x_0 coincide con il prodotto tra la derivata della funzione nel punto x_0 e il differenziale della funzione identica ovvero $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$

Osservazione 1. Osserviamo che nel passare da x_0 a $x_0 + \Delta x$ la funzione $f(x)$ subisce l'incremento $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, sempre in relazione al passaggio da x_0 a $x_0 + \Delta$ il differenziale $f'(x_0) \cdot \Delta x$ o $f'(x_0) \cdot dx$ rappresenta l'incremento sulla retta tangente al grafico in x_0 .

Guardando la (1) a meno di errori trascurabili possiamo dire che in un intorno di x_0 che vale la seguente relazione:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Esempio 1. Supponiamo di voler determinare $\sqrt{2}$ però abbiamo difficoltà nel calcolo e non abbiamo a disposizione una calcolatrice, allora possiamo considerare la funzione $f(x) = \sqrt{x}$. Calcoliamo $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ e poi il risultato lo dividiamo per 10. Noi sappiamo che possiamo approssimare in un intorno di $x_0 = 196$ la funzione $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$. Nel nostro caso $\Delta x = 4$ e $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, a questo punto abbiamo vinto perché

$$\sqrt{200} = \sqrt{196 + 4} = \sqrt{196} + \frac{1}{2\sqrt{196}} \cdot (4) = 14 + \frac{1}{7} = \frac{99}{7} \approx 14,1428 \text{ e quindi } \sqrt{2} \approx 1,41428.$$

Osserviamo che la calcolatrice riporta $\sqrt{2} \approx 1,41421$.

Esempio 2. Supponiamo di voler determinare $\sin(61^\circ)$ però abbiamo difficoltà nel calcolo e non abbiamo a disposizione una calcolatrice, allora possiamo considerare la funzione $f(x) = \sin x$. Noi sappiamo che possiamo approssimare in un intorno di $x_0 = 60^\circ$ la funzione $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$. Nel nostro caso $\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ e $f'(x_0) = \cos x_0$, a questo punto abbiamo vinto perché

$$\sin 61^\circ = \sin 60^\circ + \cos 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{180\sqrt{3} + \pi}{360} \approx 0,87475.$$

Osserviamo che la calcolatrice riporta $\sin 61^\circ \approx 0,87476$.

Esempio 3. Assegnata la funzione $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + x - 2$ determinare il suo valore in $x = 2,001$. Se avete pazienza calcolate $f(2,001)$, noi adoperiamo un' approssimazione mediante la nozione di differenziale con $x_0 = 2$, sappiamo che $f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + 1$ e quindi possiamo dire che pur di commettere un errore piccolo che

$$f(2,001) = f(2 + 0,001) = f(2) + f'(2) \cdot \frac{1}{1000} = 56 + 125 \cdot \frac{1}{1000} = 56,125$$

Grafici tangenti in un punto x_0

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni, diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono tangenti nel punto di ascissa x_0 se i relativi grafici delle funzioni ammettono la stessa retta tangente nel punto $P \equiv (x_0, f(x_0))$ o che è lo stesso $P \equiv (x_0, g(x_0))$. A tal proposito devono valere le seguenti condizioni:

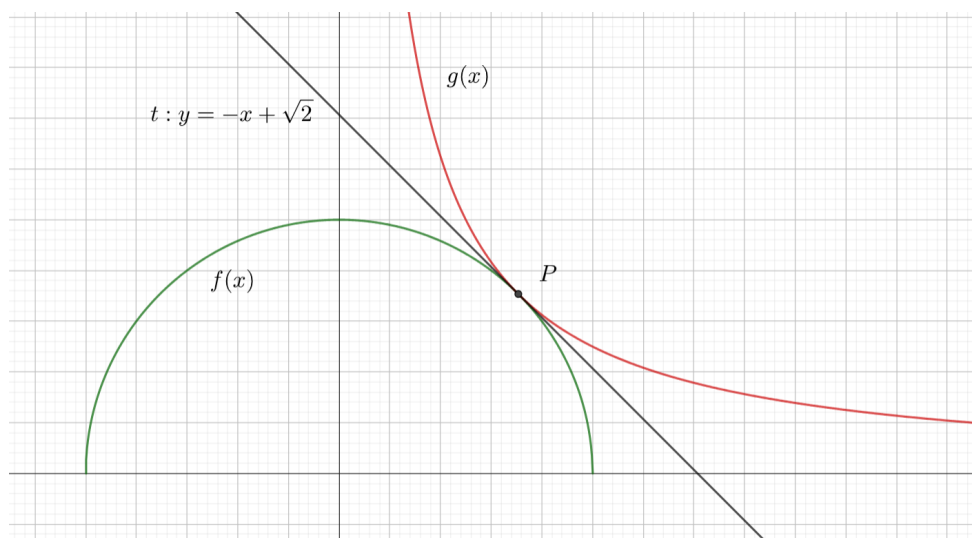
$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

In tal caso la retta tangente avrà equazione $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ o che è lo stesso $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$.

Esempio 4. Verifichiamo se le funzioni $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{2x}$ sono tangenti in qualche punto. Dobbiamo controllare se il sistema ammette soluzioni:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2x} \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2x^2} \end{cases} \implies \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2x} \\ \sqrt{1-x^2} = 2x^3 \end{cases}$$

Dalle precedenti equazioni mediante sostituzione si trova $4x^4 = 1 \implies x^2 = \pm \frac{1}{2}$. L'equazione $x^2 = -\frac{1}{2}$ non ammette soluzioni, mentre l'equazione $x^2 = \frac{1}{2}$ ammette le soluzioni $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e di queste due soluzioni solo $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ è accettabile (faccio osservare che una soluzione deve rendere il secondo membro dei termini dell'ultimo sistema scritto non negativo). Calcolando $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e quindi $P \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ mentre si calcola da una delle due equazioni del primo sistema $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$ e in definitiva la retta tangente ha equazione $t: y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ovvero $y = -x + \sqrt{2}$.



Esercizio 1. Verifica se le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2e \ln x$ sono tangenti in qualche punto, in caso affermativo determinare l'equazione della retta tangente ai grafici delle funzioni.

Grafici ortogonali in un punto x_0

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni, diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono ortogonali nel punto di ascissa x_0 se i relativi grafici delle funzioni ammettono le rispettive rette tangenti ortogonali nel punto $P \equiv (x_0, f(x_0))$ o che è lo stesso $P \equiv (x_0, g(x_0))$. A tal proposito devono valere le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1 \end{cases}$$

In tal caso le rette tangenti avranno equazioni:

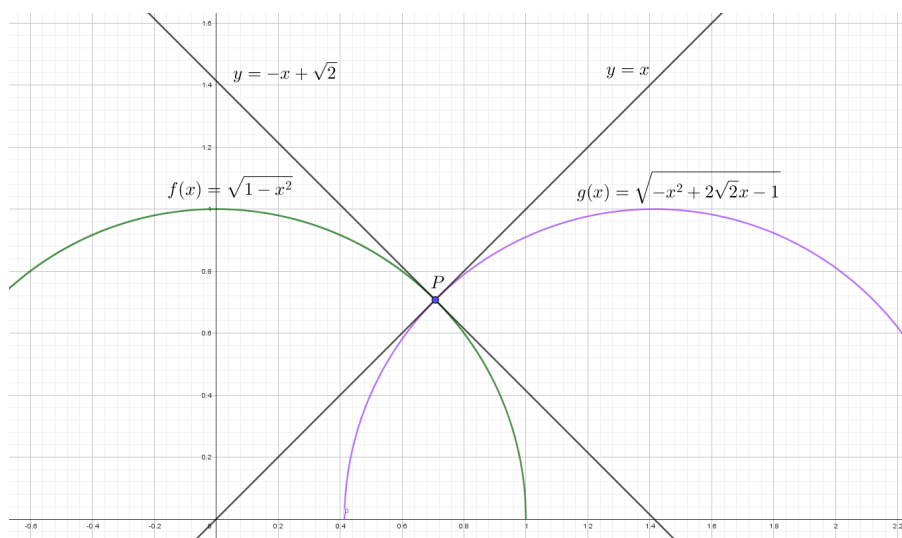
$$t_1 : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$t_2 : y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Esempio 5. Verifichiamo se le funzioni $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ e $g(x) = \sqrt{-x^2 + 2\sqrt{2}x - 1}$ sono ortogonali in qualche punto. Dobbiamo controllare se il sistema ammette soluzioni:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{-x^2 + 2\sqrt{2}x - 1} \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-x + \sqrt{2}}{\sqrt{-x^2 + 2\sqrt{2}x - 1}} = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} 1-x^2 = -x^2 + 2\sqrt{2}x - 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-x + \sqrt{2}}{\sqrt{-x^2 + 2\sqrt{2}x - 1}} = -1 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo l'unica soluzione $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Possiamo limitarci ad osservare che tale soluzione soddisfa anche la seconda equazione con una semplice sostituzione. Calcolando $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e quindi $P \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ mentre si calcola da una delle due equazioni del primo sistema $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$ e di conseguenza $g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$ e in definitiva le relative rette tangenti sono $t_1 : y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ovvero $y = -x + \sqrt{2}$ e $t_2 : y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ovvero $y = x$.



Esercizio 2. Verifica se le funzioni $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 7} - 3$ sono ortogonali in qualche punto, in caso affermativo determinare le equazioni delle rispettive rette tangenti ai grafici delle funzioni.