

Derivate con valori assoluti

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola

25 Febbraio 2026

La nozione di valore assoluto non è molto simpatica agli studenti, quando si parla di valore assoluto storcono il naso e lo trovano fastidioso, l'incontro con esso non è mai ben gradito. Purtroppo sono proprio queste le cose su cui andare a indagare per vedere le differenze, a tutti piacciono le cose lineari e quelle fastidiose le lasciamo agli altri. In questa nota vogliamo partire dal basso e fare chiarezza su alcune questioni e i loro intrecci e per questo vi invito a studiare tutto con molta attenzione. Una funzione a tratti che ha una certa importanza è *la funzione valore assoluto* ovvero $f(x) = |x|$, essa è definita in questo modo:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vista l'importanza ne riportiamo il grafico:

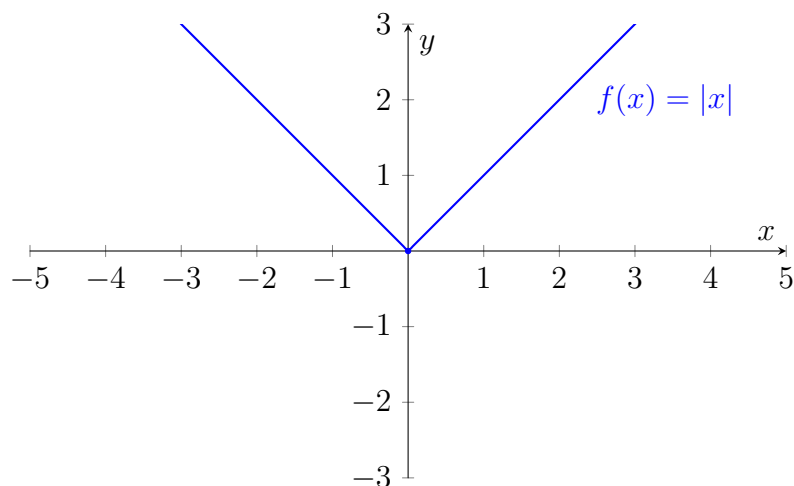


Figura 1: Il grafico della *funzione valore assoluto*

Esiste un'altra funzione che riveste una certa importanza e che ha un legame con la funzione valore assoluto essa è *la funzione signum* che si indica con $f(x) = \text{sgn}(x)$ ed è definita in questo modo:

$$f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vista l'importanza ne riportiamo il grafico:

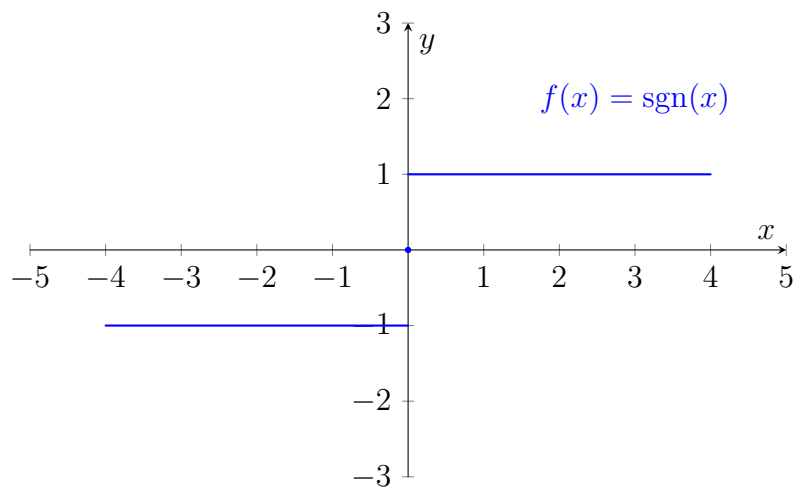


Figura 2: Il grafico della *funzione signum* o *funzione segno*

Lo diciamo per estrema chiarezza ma non dovremmo nemmeno menzionarlo per la semplicità della funzione segno. Dobbiamo sapere che $\text{sgn}(-7) = -1$, $\text{sgn}\left(-\frac{3}{4}\right) = -1$, $\text{sgn}(0) = 0$, $\text{sgn}\left(\frac{7}{3}\right) = 1$ e $\text{sgn}(8) = 1$.

A questo punto possiamo trovare un legame tra *la funzione valore assoluto* e *la funzione segno*? La risposta è affermativa e vale quanto segue e lo potete constatare con mano:

$$|x| = x \cdot \text{sgn}(x) \quad (1)$$

La relazione precedente è molto chiara ed evidente:

1. se $x > 0$, allora $|x| = x$ e $\text{sgn}(x) = 1$ e quindi $|x| = x \cdot \text{sgn}(x)$ perchè $x = x \cdot 1$.
2. se $x = 0$, allora $|x| = 0$ e $\text{sgn}(x) = 0$ e quindi $|x| = x \cdot \text{sgn}(x)$ perchè $0 = 0 \cdot 0$.
3. se $x < 0$, allora $|x| = -x$ e $\text{sgn}(x) = -1$ e quindi $|x| = x \cdot \text{sgn}(x)$ perchè $-x = x \cdot (-1)$.

Con questi precedenti tre punti abbiamo provato la relazione (1).

Torniamo alle nostre belle derivate. Cosa abbiamo detto in una delle prime lezioni? Abbiamo rimarcato che *la funzione valore assoluto* è derivabile in ogni punto $x \neq 0$. Ricordiamo che in $x = 0$ la funzione non è derivabile in quanto abbiamo provato che $f'_-(0) = -1$ e $f'_+(0) = 1$.

Nei punti $x \neq 0$ che la derivata di $f(x) = |x|$ sia la funzione $f'(x) = \text{sgn}(x)$ si può dimostrare dalla relazione (1) come derivata di un prodotto, infatti abbiamo che:

$$|x|' = [x \cdot \text{sgn}(x)]' = 1 \cdot \text{sgn}(x) + x \cdot (\text{sgn}(x))' = 1 \cdot \text{sgn}(x) + x \cdot 0 = \text{sgn}(x).$$

A questo punto possiamo dire che se $x \neq 0$, allora $|x|' = \frac{|x|}{x} = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Osservazione 1. Veniamo per alla cosa che ci interessa di più, ovvero come si calcolano le derivate di funzioni che coinvolgono i valori assoluti? Insomma come si calcolano le derivate delle funzioni $f(x) = |x^2 - 4|$ o $f(x) = \ln |x + 1| - |x + 2|$?

Per rispondere a questa domanda dobbiamo premettere come al solito i fatti teorici. La nostra funzione è $|f(x)|$ e come in precedenza possiamo dire che vale quanto segue:

$$|f(x)| = f(x) \cdot \operatorname{sgn}(f(x)) \quad (2)$$

La relazione precedente è molto chiara ed evidente:

1. se $f(x) > 0$, allora $|f(x)| = f(x)$ e $\operatorname{sgn}(f(x)) = 1$ e quindi $|f(x)| = f(x) \cdot \operatorname{sgn}(f(x))$ perché $f(x) = f(x) \cdot 1$.
2. se $f(x) = 0$, allora $|f(x)| = 0$ e $\operatorname{sgn}(f(x)) = 0$ e quindi $|f(x)| = f(x) \cdot \operatorname{sgn}(f(x))$ perché $0 = 0 \cdot 0$.
3. se $f(x) < 0$, allora $|f(x)| = -f(x)$ e $\operatorname{sgn}(f(x)) = -1$ e quindi $|f(x)| = f(x) \cdot \operatorname{sgn}(f(x))$ perché $-f(x) = f(x) \cdot (-1)$.

Con questi precedenti tre punti abbiamo provato la relazione (2).

$$\begin{aligned} |f(x)|' &= [f(x) \cdot \operatorname{sgn}(f(x))]' = f'(x) \cdot \operatorname{sgn}(f(x)) + f(x) \cdot (\operatorname{sgn}(f(x)))' = \\ &= f'(x) \cdot \operatorname{sgn}(f(x)) + f(x) \cdot 0 = f'(x) \cdot \operatorname{sgn}(f(x)). \end{aligned}$$

In forma compatta possiamo scrivere:

$$|f(x)|' = f'(x) \cdot \operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(f(x)) \cdot f'(x) \quad (3)$$

Tenendo conto della relazione in (2) se $f(x) \neq 0$ possiamo scrivere $\operatorname{sgn}(f(x)) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$.

Mettendo insieme alla (3) concludiamo:

$$|f(x)|' = \frac{|f(x)|}{f(x)} \cdot f'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{se } f(x) > 0 \\ -f'(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \quad (4)$$

La relazione (4) è quella che interessa a noi, osserviamo che $|f(x)|$ non è derivabile nei punti x_0 che sono *zeri* di $f(x)$ e non è derivabile nei punti dove $f(x)$ non è derivabile (il soggetto è $|f(x)|$, non sto ripetendo la stessa cosa utilizzando il termine *derivabile*).

In sintesi possiamo dire le seguenti cose:

(1) Se $x \neq 0$, allora $|x| = \frac{|x|}{x} \cdot x$.

(2) Se $f(x) \neq 0$ e $f(x)$ è derivabile, allora $|f(x)|' = \frac{|f(x)|}{f(x)} \cdot f'(x)$.

Esercizio 1. *Determina le derivate delle seguenti funzioni:*

a) $f(x) = |x^2 - 4|$

b) $f(x) = |x^2 + x|$

c) $f(x) = e^{|x|}$

d) $f(x) = \ln|x+1| - |x+2|$

e) $f(x) = |\ln(x^2 - 4)|$