

Riflessione sul concetto di limite

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fericola

5 Novembre 2025

Il setting è il seguente: $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 è un punto di accumulazione per X dominio di f . Vista l'importanza del limite la scrittura la mettiamo in posizione centrale:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Osservazione 1 Abbiamo più volte precisato che calcolando $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ siamo interessati a cosa succede in $I^*(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ e non ci intessiamo proprio del punto x_0 in quanto in esso la funzione potrebbe benissimo non essere definita. In parole brutali una cosa è $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e ben altra cosa è $f(x_0)$. Sono due entità completamente a se stanti.

Intanto sappiamo che $x_0 \in \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, insomma $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = -\infty$, $x_0 = +\infty$. Il destino di l è leggermente diverso nel senso che si aggiunge una nuova cosa $\#$; quindi $l \in \mathbb{R}$, $l = -\infty$, $l = +\infty$ e $l = \#$.

Attenzione che dobbiamo essere furbi se uno ci dice: *Mi calcoli $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 - x^2}$?* Evidentemente questo buontempone ci vuole prendere in giro perchè i limiti si fanno nei punti di accumulazione dell'insieme di definizione X della funzione. Voi studenti di 5A siete furbi perchè sapete che il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ è $X = [-2, 2]$ e quindi quel limite è una *bufala* e come voler andare a raccogliere delle *buonissime ciliegie nei fondali marini*.

Altra bufalaccia è calcolare $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_{\frac{1}{2}} x$ perchè il dominio di $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ è $X = (0, +\infty)$ e $-\infty$ non è punto di accumulazione per $X = (0, +\infty)$. Invece notiamo che $0 \notin X$ ma ha senso $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x$ perchè 0 pur non appartenendo a X è un punto di accumulazione a sinistra per $X = (0, +\infty)$ e quindi si può calcolare il limite destro. Poi siamo anche bravi nel ricordare il grafico della funzione $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ e concludiamo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$. Ha senso anche calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$ sempre aiutandoci con il grafico di f . Abbiamo calcolato il limite "ai bordi" del dominio $X = (0, +\infty)$.

Ci chiediamo come si calcola il limite negli altri punti? Siamo fortunati perchè la funzione $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ in $X = (0, +\infty)$ è una *funzione continua* e questo vuol dire che $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} x_0$ e questo $\forall x \in (0, +\infty)$; vogliamo calcolare $\lim_{x \rightarrow 2} \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$, vogliamo calcolare $\lim_{x \rightarrow 7} \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 7$.

Per le funzioni continue calcolare il limite è facile perchè $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. La buona notizia è che tutte le funzioni elementari che noi nel passato abbiamo messo in evidenza sono funzioni continue nel loro dominio di definizione X .

Ad esempio la funzione $f(x) = \sin x$ è una funzione continua nel suo dominio $X = \mathbb{R}$ e quindi $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$. Anche la funzione $f(x) = x$ è una funzione continua nel suo dominio $X = \mathbb{R}$ e quindi $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$. Anche la funzione $f(x) = 1 - \cos^2 x$ è una funzione continua nel suo dominio $X = \mathbb{R}$ e quindi $\lim_{x \rightarrow x_0} (1 - \cos^2 x) = 1 - \cos^2 x_0$. Anche la funzione $f(x) = x^2$ è una funzione continua nel suo dominio $X = \mathbb{R}$ e quindi $\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2$. Brutalmente per calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ basta calcolare $f(x_0)$. Ad esempio $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4$.

Qualcuno potrebbe davvero gioire e pensare che il giochino è facile perchè basta sostituire ed è fatta!!! Evviva, evviva, evviva perchè calcolare un limite è un gioco da bimbetti, accorrette tutti bimbi perchè è facile ci sta la giostrina e ci divertiamo!!!

Iniziamo a calcolare questi tre limiti (ne calcoleremo tanti nel futuro): $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$. Sappiamo che tutte le funzioni in gioco sono continue e quindi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$ Ops! E ora che faccio? Vediamo l'altro $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \frac{1 - \cos^2 0}{0^2} = \frac{1 - 1^2}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$ Ops! E ora che faccio? Vediamo l'altro $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ Ops! E ora che faccio?



Non ci preoccupiamo perché la strada seppur lunga sarà non tortuosa se le cose si sapranno affrontare con il giusto impegno, non diffondiamo panico inutilmente. Nel futuro dimostreremo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Ce ne occuperemo in serenità nelle prossime puntate e prima di addentrarci bene nel calcolo familiarizzeremo con il calcolo di limiti mansueti per poi passare a cose un pochino più delicate. Sono parole di speranza e di gioia con la convinzione che faremo bene. Forza ragazzi e su con l'entusiasmo!!!

