

Complementi ai numeri reali

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola

7 Ottobre 2025

Supponiamo che $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione 1 Diremo che $y \in \mathbb{R}$ è un maggiorante dell'insieme A se accade che $y \geq a \ \forall a \in A$. Un insieme A che ammette qualche maggiorante si dice limitato superiormente, se invece esso non ammette maggioranti si dice non limitato superiormente oppure illimitato superiormente.

Un maggiorante di un insieme A è un numero reale y che è maggiore o uguale di un qualsiasi numero reale appartenente ad A . Ad esempio se consideriamo l'insieme $A = [2, 7)$ possiamo dire che 10 è un maggiorante, addirittura esistono infiniti maggioranti e vi potete divertire. Dunque $A = [2, 7)$ è un insieme limitato superiormente. Se consideriamo $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ esso non ammette maggioranti e quindi rappresenta un insieme *illimitato superiormente*.

Definizione 2 Diremo che $y \in \mathbb{R}$ è un minorante dell'insieme A se accade che $y \leq a \ \forall a \in A$. Un insieme A che ammette qualche minorante si dice limitato inferiormente, se invece esso non ammette minoranti si dice non limitato inferiormente oppure illimitato inferiormente.

Un minorante di un insieme A è un numero reale y che è minore o uguale di un qualsiasi numero reale appartenente ad A . Ad esempio se consideriamo l'insieme $A = [2, 7)$ possiamo dire che 0 è un minorante, addirittura esistono infiniti minoranti e vi potete divertire. Dunque $A = [2, 7)$ è un insieme limitato inferiormente. Se consideriamo $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ esso non ammette minoranti e quindi rappresenta un insieme *illimitato inferiormente*.

Definizione 3 Assegnato un insieme A diremo che M è il massimo di A e scriviamo $\max A = M$ se M è un maggiorante dell'insieme A che appartiene all'insieme A .

Definizione 4 Assegnato un insieme A diremo che m è il minimo di A e scriviamo $\min A = m$ se m è un minorante dell'insieme A che appartiene all'insieme A .

Il *minimo* e il *massimo* sappiamo che sono numeri reali riferiti ad un insieme A e potrebbero non esistere. Solo alcuni esempi possono chiarire i concetti appena introdotti. Consideriamo l'insieme $A = [-2, 4]$ non ci sono dubbi che il minimo di tale insieme è $m = -2$ e il massimo di tale insieme è $M = 4$. Se consideriamo l'insieme $A = [3, 7)$ esso ammette minimo $m = 3$ ma non esiste un massimo M , qualcuno potrebbe pensare che 7 sia il massimo ma questo non è vero perchè 7 non appartiene a $A = [3, 7)$, di sicuro 7 è un maggiorante di $A = [3, 7)$. In modo analogo se consideriamo l'insieme $A = (-3, 5]$ esso ammette massimo $M = 5$ ma non esiste un minimo m , qualcuno potrebbe pensare che -3 sia il minimo ma questo non è vero perchè -3 non appartiene a $A = (-3, 5]$, di sicuro -3 è un minorante di $A = (-3, 5]$. Infine è facile controllare che l'insieme $A = (3, 10)$ non ha nè minimo e nè massimo. In conclusione assegnato un insieme di numeri reali $A \subseteq \mathbb{R}$ può accadere di tutto relativamente all'esistenza del minimo m o del massimo M . Per ovviare a questi inconvenienti si introducono altri concetti che sono più generali di quello di minimo o massimo ed esistono sempre, si tratta dell'estremo superiore L e dell'estremo inferiore l di un qualsiasi sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Supponiamo che $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione 5 Supponiamo che A ammette qualche maggiorante, diremo che $L \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore dell'insieme A , scrivendo $\sup A = L$, se L è il minimo dei maggioranti. Se l'insieme A non ammette maggioranti, allora diremo che $\sup A = +\infty$.

Definizione 6 Supponiamo che A ammette qualche minorante, diremo che $l \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore dell'insieme A , scrivendo $\inf A = l$, se l è il massimo dei minoranti. Se l'insieme A non ammette minoranti, allora diremo che $\inf A = -\infty$.

Esempio 1 L'insieme $A = (2, 6)$ non ha nè minimo e nè massimo ma $\inf A = 2$ e $\sup A = 6$. Per l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ possiamo dire che $\inf A = \min A = 0$ e $\sup A = +\infty$.