

Proprietà delle funzioni e composizione tra funzioni

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fericola

6 Ottobre 2025

1 Alcune proprietà delle funzioni

Supponiamo di avere una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Definizione 1 Diremo che la funzione f è pari nel suo dominio X se $\forall x \in X$, accade che $-x \in X$ ed è verificata la seguente relazione: $f(x) = f(-x)$.

Tra le funzioni elementari come esempio di funzione pari possiamo considerare $f(x) = x^2$, infatti noi sappiamo che $f(x) = x^2$ e $f(-x) = (-x)^2$ ed essendo $x^2 = (-x)^2$ la definizione di funzione pari è verificata. Un altro esempio di funzione pari è la funzione $f(x) = \cos x$ (provate a verificarlo!). Osserviamo che il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Osserviamo che una funzione per essere *pari* deve avere dominio X simmetrico rispetto a 0, insomma se $x_0 \in X \implies -x_0 \in X$. Se una funzione non ha dominio simmetrico rispetto a 0 non può essere *pari*. Nel prossimo esempio vediamo il grafico di una funzione pari:

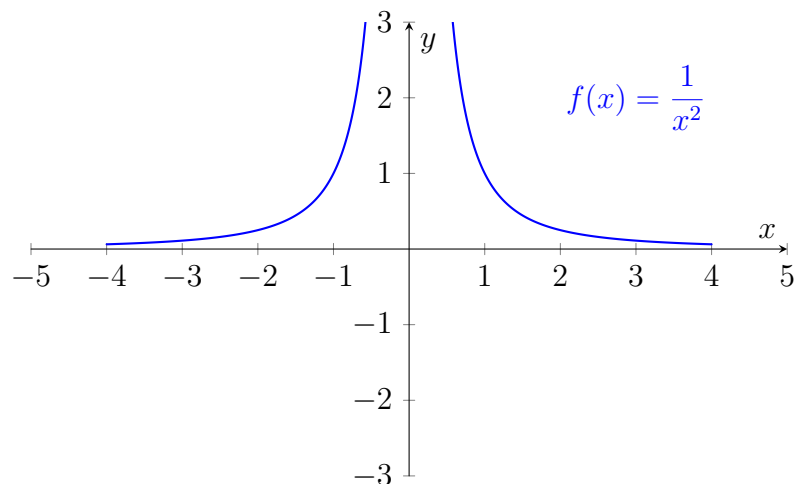


Figura 1: Il grafico della funzione reciproca della funzione quadratica, funzione pari.

Definizione 2 Diremo che la funzione f è dispari nel suo dominio X se $\forall x \in X$, accade che $-x \in X$ ed è verificata la seguente relazione: $f(-x) = -f(x)$.

Tra le funzioni elementari come esempio di funzione dispari possiamo considerare $f(x) = x^3$, infatti noi sappiamo che $f(-x) = -x^3 = -f(x)$ e la definizione di funzione dispari è verificata. Un altro esempio di funzione dispari è la funzione $f(x) = \sin x$ (provate a verificarlo!). Osserviamo che il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine del riferimento cartesiano. Osserviamo che una funzione per essere *dispari* deve avere dominio X simmetrico rispetto a 0, insomma se $x_0 \in X \implies -x_0 \in X$. Se una funzione non ha dominio simmetrico rispetto a 0 non può essere *dispari*. Inoltre se $0 \in X$ allora $f(0) = 0$ e questo perchè, essendo dispari, $f(-0) = -f(0) \implies f(0) = -f(0) \implies 2f(0) = 0 \implies f(0) = 0$. Insomma una funzione dispari definita in 0 deve necessariamente passare per l'origine del riferimento cartesiano. Questo vuol dire che se una funzione è *dispari* e non passa per l'origine non è definita in $x = 0$ come è possibile constatare dal successivo grafico.

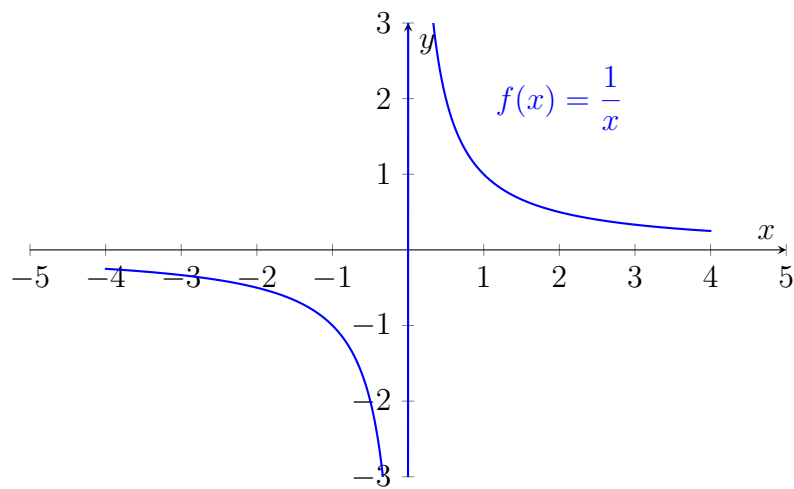


Figura 2: Grafico della della funzione reciproca della funzione identica

Osservazione 1 *Lo abbiamo già detto in precedenza e vogliamo ulteriormente precisarlo. Quando si fa lo studio del grafico di una funzione nell'andare alla ricerca di eventuali simmetrie, funzione pari o funzione dispari, conviene osservare che il dominio X della funzione sia simmetrico rispetto a 0. Se una funzione non ha dominio simmetrico rispetto a 0 inutile procedere nella ricerca di simmetrie (pari o dispari).*

2 Le funzioni periodiche

Supponiamo di avere una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Definizione 3 *Diremo che la funzione f è periodica se esiste un numero T per il quale $x, x+T \in X$ con $f(x) = f(x+T)$. Se invece esiste $T' > 0$ il minimo numero reale positivo per il quale $f(x) = f(x+T')$, allora T' si dice minimo periodo. Questa ultima precisazione non è banale perchè esistono funzioni f che sono periodiche ma che non ammettono un $T' > 0$ come minimo periodo.*

Per la definizione appena data non è sbagliato dire che la funzione $f(x) = \sin x$ è una funzione periodica di periodo $T = 4\pi$, ma sappiamo anche che essa è una funzione periodica che ammette $T' = 2\pi$ come minimo periodo. Ci sono funzioni periodiche che non ammettono minimo periodo T' e per chi volesse approfondire può prendere come esempio la *funzione di Dirichlet*.

Vogliamo subito fare una precisazione quando in questo paragrafo parliamo di periodo $T > 0$ di una funzione periodica non intenderemo che quello è il minimo periodo, potrebbe anche esserlo ma non è detto che lo sia. Facciamo questa precisazione perché capiterà di studiare il grafico di una funzione periodica, ora se il grafico viene esplicitato nel periodo T che non è il minimo periodo $T' > 0$ non si commette nessun errore. Facciamo subito un esempio per quello appena detto.

Tra le funzioni elementari come esempio di funzione periodica possiamo considerare $f(x) = \sin x$ che ha minimo periodo $T' = 2\pi$, infatti noi sappiamo che $f(x) = \sin x$ e $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi)$ ed essendo $\sin x = \sin(x+2\pi)$ la definizione di funzione periodica è verificata. Abbiamo parlato di minimo periodo perché è anche vero che $\sin x = \sin(x+4\pi)$ e quindi $T = 4\pi$ è un periodo della funzione $f(x) = \sin x$. Se noi facciamo il grafico della funzione $f(x) = \sin x$ nell'intervallo $[0, 4\pi]$ non facciamo altro che riportare il grafico di $[0, 2\pi]$ anche in $[2\pi, 4\pi]$ e ai fini del grafico non commettiamo errore. Un altro esempio di funzione periodica è la funzione $f(x) = \tan x$ (provate a verificarlo!) e il suo minimo periodo è $T' = \pi$. Osserviamo che una funzione per essere periodica deve avere dominio X illimitato (tra non molto chiariremo meglio il concetto di *insieme illimitato*. Attenzione le funzioni le funzioni $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \arctg x$, $f(x) = \text{arcctg} x$

non sono funzioni periodiche, le prime due hanno dominio X limitato e le ultime due pur avendo come dominio $X = \mathbb{R}$ non sono per nulla periodiche. Bisogna anche aggiungere che ad essere periodiche non sono solo le funzioni goniometriche elementari: $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$, ci sono altre funzioni periodiche che hanno altra natura e una di esse è la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} x - n & \text{se } x \in [n, n+1] \text{ con } n \text{ pari} \\ -x + n + 1 & \text{se } x \in [n, n+1] \text{ con } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Il grafico della funzione in alto è il seguente:

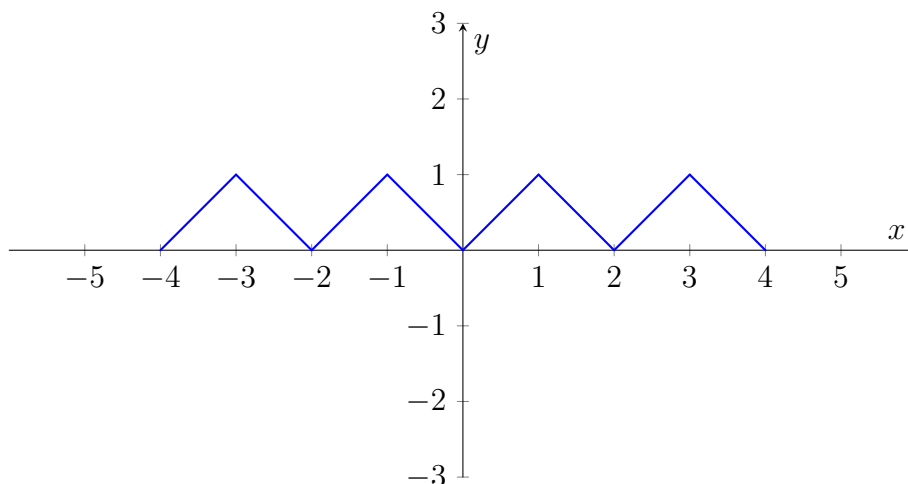


Figura 3: Grafico di una funzione periodica di periodo $T = 2$

La questione legata al calcolo del minimo periodo $T' > 0$ quando si generano nuove funzioni a partire da funzioni periodiche è abbastanza delicata e noi ci limitiamo ad enunciare questa proposizione e far vedere poi come si calcola il periodo T di funzioni periodiche, se poi esso è anche il minimo periodo a noi non interessa. Nel futuro per evitare di commettere sviste parleremo di periodo T , senza precisare che sia un periodo o il minimo periodo.

Proposizione 4 *Se $f(x)$ è una funzione periodica di periodo T , allora la funzione $f(kx)$ è periodica di periodo $S = \frac{T}{|k|}$. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni periodiche di periodo rispettivamente T_f e T_g , allora se $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}$ le funzioni $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$ sono funzioni periodiche di periodo $T = m.c.m.(T_f, T_g)$ (abbiamo parlato di periodo perchè non è garantito che T sia il minimo e il periodo potrebbe essere anche un sottomultiplo di T). Se $\frac{T_f}{T_g} \notin \mathbb{Q}$ le funzioni $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$ non sono funzioni periodiche.*

Esempio 1 *La funzione $f(x) = \sin 5x$ è periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{5}$. La funzione $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$ è periodica di periodo $T = \frac{\pi}{\frac{1}{3}}$ e quindi $T = 3\pi$. La funzione $f(x) = \cos \frac{1}{4}x$ è periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}}$ e quindi $T = 8\pi$.*

Esempio 2 *La funzione $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$ è periodica di periodo $T = m.c.m.(2\pi, \pi) = 2\pi$. Vediamo come si calcola il periodo di $f(x) = \sin 3x + \operatorname{tg} 5x$, il primo addendo ha periodo $T_1 = \frac{2\pi}{3}$*

e il secondo addendo ha periodo $T_2 = \frac{\pi}{5}$. Riportiamo al entrambi i periodo con il medesimo denominatore e quindi $T_1 = \frac{10\pi}{15}$ e $T_2 = \frac{3\pi}{15}$, allora m.c.m. $\left(\frac{10\pi}{15}, \frac{3\pi}{15}\right) = \frac{30\pi}{15} = 2\pi$ e quindi la funzione $f(x) = \sin 3x + \operatorname{tg} 5x$ ha periodo $T = 2\pi$.

Esempio 3 Vediamo come si calcola il periodo di $f(x) = \sin 3x + \operatorname{tg} 5x$, il primo addendo ha periodo $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ e il secondo addendo ha periodo $T_2 = \frac{\pi}{5}$. Riportiamo entrambi i periodi con il medesimo denominatore e quindi $T_1 = \frac{10\pi}{15}$ e $T_2 = \frac{3\pi}{15}$, allora m.c.m. $\left(\frac{10\pi}{15}, \frac{3\pi}{15}\right) = \frac{30\pi}{15} = 2\pi$ e quindi la funzione $f(x) = \sin 3x + \operatorname{tg} 5x$ ha periodo $T = 2\pi$.

Esempio 4 Vediamo come si calcola il periodo di $f(x) = \sin \frac{1}{3}x + \cos 3x$, il primo addendo ha periodo $T_1 = 6\pi$ e il secondo addendo ha periodo $T_2 = \frac{2\pi}{3}$. Riportiamo al entrambi i periodi con il medesimo denominatore e quindi $T_1 = \frac{18\pi}{3}$ e $T_2 = \frac{2\pi}{3}$, allora m.c.m. $\left(\frac{18\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{18\pi}{3} = 6\pi$ e quindi la funzione $f(x) = \sin \frac{1}{3}x + \cos 3x$ ha periodo $T = 6\pi$.

Esempio 5 Vediamo come si calcola il periodo di $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$, il primo addendo ha periodo $T_1 = 2\pi$ e il secondo addendo ha periodo $T_2 = \frac{2\pi}{3}$. Riportiamo al entrambi i periodi con il medesimo denominatore e quindi $T_1 = \frac{6\pi}{3}$ e $T_2 = \frac{2\pi}{3}$, allora m.c.m. $\left(\frac{6\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$ e quindi la funzione $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$ ha periodo $T = 2\pi$, in questo caso noi concludiamo che $T = 2\pi$ è un periodo della funzione e vi metto per iscritto che in questo caso $T' = \pi$ è il minimo periodo. Diciamo che le tecniche evidenziate servono di certo per calcolare un periodo T e se poi quello è il minimo periodo è altro discorso.

Esempio 6 Vediamo come si calcola il periodo di $f(x) = \sin \sqrt{2}x + \cos x$, il primo addendo ha periodo $T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ e il secondo addendo ha periodo $T_2 = 2\pi$. Osserviamo che il rapporto dei periodi $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ e possiamo concludere che la funzione $f(x) = \sin \sqrt{2}x + \cos x$ non è periodica. Vedete cosa dice **la Proposizione 4** in alto. Insomma combinando funzioni periodiche si hanno funzione periodiche quando il rapporto dei periodi è un numero razionale.

Esempio 7 Calcolare il periodo delle delle funzioni $f(x) = \frac{\sin 2x + \cos x}{\tan \frac{\pi}{4}}$

3 Composizione di funzioni

Supponiamo di avere due funzioni, una $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e l'altra $g: Y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con la condizione $f(X) \subseteq Y$, ovvero l'immagine della f sia un sottoinsieme del dominio della g .

Avendo queste due funzioni f, g che soddisfano la condizione che l'immagine della f sia un sottoinsieme del dominio di g possiamo fare il seguente ragionamento: $\forall x \in X$ possiamo calcolare $f(x)$, ora $f(x) \in Y$ e quindi avendo g possiamo calcolare $g(f(x))$. In sostanza abbiamo costruito una funzione che $\forall x \in X \rightarrow g(f(x)) \in \mathbb{R}$ e tale funzione si indica con il simbolo:

$$(g \circ f): X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{con la regola che } (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

La funzione $(g \circ f)$ si dice *funzione composta* e si legge *g composto f*. Teniamo conto che la composizione tra funzioni è possibile quando l'immagine della f ovvero $f(X)$ è contenuta nel dominio della g ovvero Y . Vediamo di fare qualche esempio:

Esempio 8 Consideriamo la funzione $f(x) = 3x + 1$ e la funzione $g(x) = 4x$, non ci sono dubbi che $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e quindi in questo caso possiamo calcolare sia $(g \circ f)$ che $(f \circ g)$, osserviamo che la prima funzione ad agire su x è la funzione di destra:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 1) = 4(3x + 1) = 12x + 4 \implies (g \circ f)(x) = 12x + 4.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x) = 3(4x) + 1 = 12x + 1 \implies (f \circ g)(x) = 12x + 1.$$

La prima cosa che salta agli occhi è che la composizione in generale non è un'operazione commutativa e quindi $(g \circ f) \neq (f \circ g)$. Ora senza preoccuparci quando è possibile la composizione proviamo a fare qualche esercizio:

Esempio 9 Consideriamo le funzioni $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$, allora:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{(x^2 + 1) - 1} = \sqrt{x^2} = |x| \implies (g \circ f)(x) = |x|.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = x - 1 + 1 = x \implies (f \circ g)(x) = x.$$

Esempio 10 Consideriamo le funzioni $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = e^x$, allora:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}} \implies (g \circ f)(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = \frac{1}{e^x} \implies (f \circ g)(x) = \frac{1}{e^x}.$$

Esercizio 1 Consideriamo le funzioni $f(x) = \frac{x+1}{x}$ e $g(x) = \ln x$. Calcolare le funzioni $g \circ f$ e $f \circ g$.