

Alcune proprietà e segno di una funzione

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola

29 Settembre 2025

1 Segno di una funzione

Supponiamo di avere una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $A \subseteq X$.

Definizione 1 Diremo che la funzione f è non negativa in A se $\forall x \in A$ si ha che $f(x) \geq 0$. Diremo che la funzione f è positiva in A se $\forall x \in A$ si ha che $f(x) > 0$.

Se ricordiamo come è fatta la funzione $f(x) = x^2$ possiamo dire che essa è non negativa in $A = \mathbb{R}$, insomma è una funzione non negativa nel suo dominio $\mathbb{R}$. La stessa funzione $f(x) = x^2$ è positiva in $A = [3, 8]$. Il grafico di una funzione non negativa o si trova sull'asse delle x o sta al di sopra dell'asse delle x . La funzione $f(x) = 0$ che corrisponde all'asse delle x è una funzione non negativa e tutti i punti del grafico sono sull'asse delle x . Una funzione positiva ha un grafico che si trova al di sopra dell'asse delle x , un altro esempio è la funzione $f(x) = 2^x$ che è positiva in $A = \mathbb{R}$.

Definizione 2 Diremo che la funzione f è non positiva in A se $\forall x \in A$ si ha che $f(x) \leq 0$. Diremo che la funzione f è negativa in A se $\forall x \in A$ si ha che $f(x) < 0$.

Se ricordiamo come è fatta la funzione $f(x) = x^3$ possiamo dire che essa è non positiva in $A = (-\infty, 0]$. La stessa funzione $f(x) = x^3$ è negativa in $A = [-5, -2]$. Il grafico di una funzione non positiva o si trova sull'asse delle x o sta al di sotto dell'asse delle x . La funzione $f(x) = 0$ che corrisponde all'asse delle x è una funzione non positiva e tutti i punti del grafico sono sull'asse delle x . Una funzione negativa ha un grafico che si trova al di sotto dell'asse delle x , un altro esempio è la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ che è negativa in $A = (-\infty, 0)$.

Osservazione 1 Le locuzioni "al sopra", "al di sotto" o "sopra" sono efficaci perchè espressive ma vanno utilizzate con cautela.

Definizione 3 Diremo che la funzione f ha uno zero in $x_0 \in X$ se $f(x_0) = 0$. Insomma gli zeri di una funzione f sono le ascisse dei punti di intersezione tra il grafico della funzione e l'asse delle x .

Osserviamo che una funzione f potrebbe non avere zeri. La funzione $f(x) = x^2 + 4$ non ha zeri. Una funzione potrebbe avere anche infiniti zeri e questo è il caso di $f(x) = \sin x$ con zeri tutti i numeri reali del tipo $x_0 = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Il Mondo è variegato e può accadere di tutto. Nello studiare il grafico di una funzione (nostro obiettivo) ci imbattemmo nei calcoli degli zeri di una funzione che poi in sostanza ci serve per comprendere dove il grafico della funzione "taglia" o "interseca" l'asse delle x . Invece per sapere dove una funzione "taglia" l'asse delle ordinate y è sufficiente calcolare $f(0)$ quando $0 \in X$ (lo 0 potrebbe non appartenere al dominio X della funzione!!!). Ad esempio la funzione $f(x) = x^2 - 1$ attraversa l'asse delle ordinate y nel punto $P \equiv (0, -1)$ perchè $f(0) = -1$. Per la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$ non si pone proprio questo problema in quanto $0 \notin X$ e quindi come potete constatare il grafico della *funzione reciproca della funzione quadratica* non "interseca" l'asse delle y .

Osservazione 2 Voglio osservare che taluni autori utilizzano il termine non negativa come sinonimo di positiva e la locuzione positiva come sinonimo di strettamente positiva, dunque fate attenzione quando leggete nei vari testi! Attenzione che tali locuzioni sono fortemente legate all'insieme $A \subseteq X$ a cui si riferisce. Per esempio la funzione $f(x) = x^3$ è positiva in $A = [2, 5]$ e di certo essa è negativa in $A = [-7, -3]$.

2 Alcune proprietà delle funzioni

Supponiamo di avere una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Definizione 4 Diremo che la funzione f è pari nel suo dominio X se $\forall x \in X$, accade che $-x \in X$ ed è verificata la seguente relazione: $f(x) = f(-x)$.

Tra le funzioni elementari come esempio di funzione pari possiamo considerare $f(x) = x^2$, infatti noi sappiamo che $f(x) = x^2$ e $f(-x) = (-x)^2$ ed essendo $x^2 = (-x)^2$ la definizione di funzione pari è verificata. Un altro esempio di funzione pari è la funzione $f(x) = \cos x$ (provate a verificarlo!). Osserviamo che il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Definizione 5 Diremo che la funzione f è dispari nel suo dominio X se $\forall x \in X$, accade che $-x \in X$ ed è verificata la seguente relazione: $f(x) = -f(-x)$.

Tra le funzioni elementari come esempio di funzione dispari possiamo considerare $f(x) = x^3$, infatti noi sappiamo che $f(x) = x^3$ e $-f(-x) = -(-x)^3$ ed essendo $x^3 = -(-x)^3$ la definizione di funzione dispari è verificata. Un altro esempio di funzione dispari è la funzione $f(x) = \sin x$ (provate a verificarlo!). Osserviamo che il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine del riferimento cartesiano, inoltre se $0 \in X$ allora $f(0) = 0$ e questo perché essendo $f(0) = -f(-0) \Rightarrow f(0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Insomma una funzione dispari definita in 0 deve passare per l'origine del riferimento cartesiano. La funzione in grafico è dispari ma non è definita in $x = 0$.

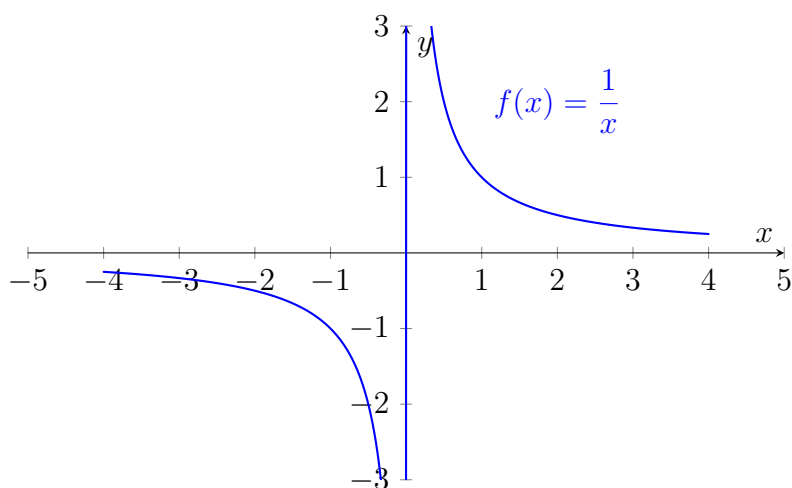


Figura 1: Grafico della della funzione reciproca della funzione identica

Definizione 6 Diremo che la funzione f è periodica di minimo periodo T se T è il più piccolo numero reale positivo per il quale $x, x+T \in X$ e inoltre vale la seguente relazione: $f(x) = f(x+T)$.

Tra le funzioni elementari come esempio di funzione periodica possiamo considerare $f(x) = \sin x$ che ha minimo periodo $T = 2\pi$, infatti noi sappiamo che $f(x) = \sin x$ e $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi)$ ed essendo $\sin x = \sin(x+2\pi)$ la definizione di funzione periodica è verificata. Abbiamo parlato di minimo periodo perché è anche vero che $\sin x = \sin(x+4\pi)$ ma $T = 4\pi$ non è il minimo numero reale per il quale vale l'uguaglianza. Un altro esempio di funzione periodica è la funzione $f(x) = \tan x$ (provate a verificarlo!) e il suo minimo periodo è $T = \pi$.