

Alcuni Teoremi sui limiti

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fericola

4 Novembre 2025

Osservazione 1. Siccome il concetto di limite è un concetto locale, riferito ad un intorno di x_0 , non è riduttivo pensare che le funzioni che via via considereremo siano definite in $I^*(x_0)$ ovvero in un intorno di x_0 eccetto al più in x_0 . Lasciamo perdere che ogni funzione ha il suo dominio. A noi interessa quello che succede in un intorno di x_0 . Quando scrivo $f : \hat{I}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, vuol dire che essa è definita in $I^*(x_0)$ e potrebbe essere definita in x_0 . Di sicuro f è definita in $I^*(x_0)$.

Osservazione 2. Tutte le dimostrazioni sono eseguite con limiti finiti, per completezza bisognerebbe trattare anche gli altri casi:

Nella prima proposizione (a) $l_1 \in \mathbb{R}$ e $l_2 = -\infty$; il caso (b) $l_1 \in \mathbb{R}$ e $l_2 = +\infty$; il caso (c) $l_1 = -\infty$ e $l_2 = -\infty$.

Nella seconda proposizione (a) $l = -\infty$; (b) $l = +\infty$.

Nella terza proposizione (a) $l = -\infty$; (b) $l = +\infty$.

Proposizione 1. Teorema di unicità del limite

(IPOTESI:) Sia $f : \hat{I}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ed esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, (TESI:) esso è unico.

Dimostrazione. Questa dimostrazione la faremo per assurdo supponendo che i due limiti siano finiti e distinti.

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \qquad (2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \qquad \text{con } l_1 \neq l_2$$

Prendiamo $\epsilon < \frac{|l_1 - l_2|}{2}$ per entrambi i limiti ovvero $2\epsilon < |l_1 - l_2|$:

Vale (1) e quindi $\exists I_1(x_0)$ tale che $\forall x \in I_1^*(x_0) \cap \hat{I}(x_0) \implies |f(x) - l_1| < \epsilon$.

Vale (2) e quindi $\exists I_2(x_0)$ tale che $\forall x \in I_2^*(x_0) \cap \hat{I}(x_0) \implies |f(x) - l_2| < \epsilon$.

Se denotiamo con $I(x_0) = I_1(x_0) \cap I_2(x_0)$ che è ancora un intorno di x_0 :

Possiamo dire che $\forall x \in I^*(x_0) \cap \hat{I}(x_0) \implies |f(x) - l_1| < \epsilon \quad e \quad |f(x) - l_2| < \epsilon$.

$$\begin{aligned} \text{Ora } |l_1 - l_2| &= |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| = \\ &= |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon < |l_1 - l_2|. \end{aligned}$$

Se confrontiamo il primo e l'ultimo termine di questa catena di disequazioni troviamo $|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$, palesemente assurda. L'assurdo è nato dall'aver supposto che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non sia unico. Concludiamo dunque che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e questo l è unico.

□

Il setting per questa proposizione è il seguente: $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in D(X)$ dove con $D(X)$ si indica il *derivato di X* e rappresenta l'insieme dei punti di accumulazione di X che è il dominio di f .

Proposizione 2. Teorema della permanenza del segno

(IPOTESI:) Se il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$, allora (TESI:) esiste un $I(x_0)$ tale che $\forall x \in I^*(x_0) \cap X$ la funzione f ha lo stesso segno del limite $l \neq 0$.

Dimostrazione. Siccome sappiamo che esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$, allora in corrispondenza di $\epsilon = \frac{|l|}{2}$ possiamo trovare $I(x_0)$ tale che $\forall x \in I^*(x_0) \cap X$ si ha $|f(x) - l| < \frac{|l|}{2}$, ovvero:

$$l - \frac{|l|}{2} < f(x) < l + \frac{|l|}{2}$$

Sia $l > 0$, allora $|l| = l$ e dalla "parte sinistra della precedente relazione" sappiamo:

$\exists I(x_0)$ tale che $\forall x \in I^*(x_0) \cap X \quad f(x) > l - \frac{|l|}{2} = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} > 0 \implies f(x) > 0$ e quindi la tesi.

Sia $l < 0$, allora $|l| = -l$ e dalla "parte destra della precedente relazione" sappiamo:

$\exists I(x_0)$ tale che $\forall x \in I^*(x_0) \cap X \quad f(x) < l + \frac{|l|}{2} = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} < 0 \implies f(x) < 0$ e quindi la tesi.

□

Proposizione 3. Teorema inverso della permanenza del segno

(IPOTESI:) Se esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e se $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I^*(x_0) \cap X$, allora (TESI:) $l \geq 0$.

(IPOTESI:) Se esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e se $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in I^*(x_0) \cap X$, allora (TESI:) $l \leq 0$.

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo e supponiamo sia $l < 0$.

Per ipotesi esiste $I_1(x_0)$ con $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I_1^*(x_0) \cap X$, invece per il teorema della permanenza del segno enunciato precedentemente $\exists I_2(x_0)$ tale che $\forall x \in I_2^*(x_0) \cap X \quad f(x) < 0$, allora $\forall x \in I_1^*(x_0) \cap I_2^*(x_0) \cap X$ accade che $f(x) \geq 0$ e $f(x) < 0$ che sono relazioni assurde e quindi dobbiamo concludere che $l \geq 0$.

L'altra si prova allo stesso modo:

Ragioniamo per assurdo e supponiamo sia $l > 0$.

Per ipotesi esiste $I_1(x_0)$ con $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in I_1^*(x_0) \cap X$, invece per il teorema della permanenza del segno enunciato precedentemente $\exists I_2(x_0)$ tale che $\forall x \in I_2^*(x_0) \cap X \quad f(x) > 0$, allora $\forall x \in I_1^*(x_0) \cap I_2^*(x_0) \cap X$ accade che $f(x) \leq 0$ e $f(x) > 0$ che sono relazioni assurde e quindi dobbiamo concludere che $l \leq 0$.

□

Proposizione 4. Teorema del confronto

(IPOTESI:) Siano $f, h, g : \widehat{I}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che in $\widehat{I}^*(x_0)$ sia $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Se accade che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$, allora (TESI:) anche $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$.

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$

Siccome $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, allora esiste $I_1(x_0)$ tale che $\forall x \in I_1^*(x_0) \cap \widehat{I}(x_0)$ si ha $l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$.

Siccome $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$, allora esiste $I_2(x_0)$ tale che $\forall x \in I_2^*(x_0) \cap \widehat{I}(x_0)$ si ha $l - \epsilon < g(x) < l + \epsilon$.

Consideriamo $I(x_0) = I_1(x_0) \cap I_2(x_0)$

$\forall x \in I^*(x_0) \cap \widehat{I}(x_0)$ si ha che (in questo intorno valgono i due limiti e le disuguaglianze tra funzioni):

$$l - \epsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < l + \epsilon \implies l - \epsilon < h(x) < l + \epsilon \text{ e quindi la tesi } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l.$$

□