

Nozioni elementari sui logaritmi

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola

30 Ottobre 2025

Non ci sono dubbi che sappiamo risolvere la disequazione esponenziale $2^x > 4$, scriviamo $2^x > 2^2$ e quindi $x > 2$.

Come ci comportiamo se dobbiamo risolvere la disequazione $2^x > 3$? In questo caso siamo in difficoltà perché per nessuna ragione al mondo possiamo scrivere 3 come potenza di 2.

Nella situazione precedente la soluzione sarà $x > \log_2 3$. Abbiamo introdotto un nuovo numero, ovvero $\log_2 3$ che si legge *logaritmo in base 2 di 3*. Prima di dedicarci alle disequazioni esponenziali che coinvolgono i logaritmi vogliamo conoscere meglio questi "nuovi numeri."

Definizione 1. *La quantità $\log_a b$ si legge logaritmo in base a di b. Esso rappresenta un numero quando la base a è maggiore di 0 e diversa da 1 e l'argomento b è un numero maggiore di 0.*

$$\log_a b \text{ con } a > 0 \wedge a \neq 1 \text{ e } b > 0$$

Dunque sono espressioni prive di significato le seguenti:

$$\log_{-\frac{1}{2}} -\frac{2}{3}; \quad \log_{-\frac{1}{2}} 4; \quad \log_5 -\frac{3}{4}; \quad \log_0 4; \quad \log_5 0; \quad \log_1 7$$

Vediamo di fare un sillogismo con altri numeri reali non amati dagli studenti, ovvero i radicali! Quando nel passato noi scrivevamo $\sqrt[3]{8}$ si intendeva quel numero che elevato alla terza ci "restituiva" 8. Restando sempre su $\sqrt[3]{8}$, possiamo dire che $\sqrt[3]{8} = 2$ perché $2^3 = 8$, così pure $\sqrt[4]{81} = 3$ perché $3^4 = 81$. Non sempre però un radicale si può trasformare in un numero razionale, se scrivo $\sqrt[3]{2}$ non ha un corrispondente razionale e ce lo dobbiamo tenere così, diciamo che $\sqrt[3]{2}$ è un numero irrazionale.

Quello che abbiamo fatto con i radicali, ora lo facciamo con i **logaritmi**. La scrittura $\log_a b$ si legge *"logaritmo in base a di b"* e rappresenta il numero "da posizionare" come esponente di a per ottenere b.

Vediamo di prendere un pochino di confidenza con i *logaritmi*. Cosa rappresenta $\log_2 16$? A questo punto se ci riflettiamo un attimo diciamo senza esitazioni che $\log_2 16 = 4$ perché $2^4 = 16$. Non è difficile constatare che:

$$\log_3 81 = 4; \quad \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2; \quad \log_{25} 5 = \frac{1}{2}; \quad \log_5 1 = 0; \quad \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3$$

Come accadeva per i radicali, non sempre però un logaritmo si può trasformare in un numero razionale, se scrivo $\log_2 3$ non ha un corrispondente razionale e ce lo dobbiamo tenere così, diciamo che $\log_2 3$ è un numero irrazionale, per essere più precisi è un numero reale con $1 < \log_2 3 < 2$.

Vediamo di mettere in evidenza alcune proprietà dei logaritmi con relativa dimostrazione:

$$\mathbf{P1:} \quad \log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

$$\mathbf{P2:} \quad \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

$$\mathbf{P3:} \quad \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b} = \log_a b$$

$$\mathbf{P4:} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Ora vogliamo mettere l'attenzione su alcune relazioni che spesso si usano e a tal riguardo per dare maggiore risalto vengono denotati come teoremi:

$$\mathbf{T1:} \quad \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

Osservazione 1. *La scrittura $\log_a xy$ non deve creare ambiguità perchè xy rappresenta l'argomento del logaritmo e per eccesso di zelo si scrive $\log_a (xy)$. La scrittura $\log_a x \cdot y$ è ben altra cosa e per non creare molte ambiguità si scrive $(\log_a x)y$ o meglio ancora $y \log_a x$ per rimarcare che y è un fattore e non fa parte dell'argomento del logaritmo. Sono fortemente convinto che le leggi dovrebbero essere scritte dai matematici che cercano di chiarire tutto senza creare delle ambiguità!!!*

Il teorema precedente è stato dimostrato per un argomento composto da due fattori ma vale in generale anche se i fattori sono n , insomma vale la seguente relazione:

$$\log_a (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \cdots + \log_a x_n$$

$$\mathbf{T2:} \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\mathbf{T3:} \quad \log_a b^n = n \cdot \log_a b \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } b > 0$$

Esercizio 1. *Calcolare il valore dei seguenti logaritmi:*

$$a) \log_{\frac{1}{2}} 16 = \quad b) \log_7 \frac{1}{49} = \quad c) \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2} = \quad d) \log_9 \frac{1}{81} = \quad e) \log_{36} \frac{1}{6} =$$

$$f) \log_8 2 = \quad g) \log_9 27 = \quad h) \log_{16} \frac{1}{32} = \quad i) \log_9 \frac{1}{3} = \quad j) \log_7 49 =$$

$$k) \log_{\frac{5}{4}} \frac{25}{16} = \quad l) \log_{\frac{3}{4}} \frac{27}{64} = \quad m) \log_{\frac{2}{3}} \frac{625}{16} = \quad n) \log_{\frac{5}{4}} 1 = \quad o) \log_{\frac{4}{3}} \frac{64}{27} =$$