Nota sui logaritmi

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola

11 Settembre 2024

Definizione 1. *Si dice* <u>*equazione esponenziale*</u> *un'equazione nella quale l'incognita compare come esponente di almeno uno dei sui termini. La più stupida equazione esponenziale che vive sul pianeta Terra assume la seguente forma:*

$$a^x = b \ \textit{con} \ a > 0 \wedge a \neq 1 \ \textit{e} \ b > 0$$

Sotto le condizioni poste per a e b la soluzione dell'equazione esponenziale in alto è $x = \log_a b$. La scrittura $\log_a b$ si legge logaritmo in base a di b. *Evidentemente teniamo conto che per definizione:*

$$a^{\log_a b} = b \ \textit{(mettiamo nella testa che questa identità di sinistra la utilizzeremo spesso e ricordiamo che } Papa^{\log_{Papa} Cardinale} = Cardinale\textit{)}$$

Insomma, volendo forzare le cose, l'equazione esponenziale $Papa^x = Cardinale$ ha come soluzione $x = \log_{Papa} Cardinale$ e quindi l'identità in alto. Non pubblicizzate queste cose!

Dunque sono espressioni prive di significato le seguenti:

$$\log_{-\frac{1}{2}} -\tfrac{2}{3}; \quad \log_{-\frac{1}{2}} 4; \quad \log_5 -\tfrac{3}{4}; \quad \log_0 4; \quad \log_5 0; \quad \log_1 7$$

Vediamo di fare un sillogismo con altri numeri reali non amati dagli studenti, ovvero i radicali! Quando nel passato noi scrivevamo $\sqrt[3]{8}$ si intendeva quel numero che elevato alla terza ci "restituiva" 8. Restando sempre su $\sqrt[3]{8}$, possiamo dire che $\sqrt[3]{8} = 2$ perché $2^3 = 8$, così pure $\sqrt[4]{81} = 3$ perché $3^4 = 81$. Non sempre però un radicale si può trasformare in un numero razionale, se scrivo $\sqrt[3]{2}$ non ha un corrispondente razionale e ce lo dobbiamo tenere così, diciamo che $\sqrt[3]{2}$ è un numero irrazionale.

Quello che abbiamo fatto con il radicali, ora lo facciamo con i **logaritmi**. La scrittura $\log_a b$ si legge *"logaritmo in base a di b"* e rappresenta il numero "da posizionare" come esponente di a per ottenere b.

Vediamo di prendere un pochino di confidenza con i *logaritmi*. Cosa rappresenta $\log_2 16$? A questo punto se ci riflettiamo un attimo diciamo senza esitazioni che $\log_2 16 = 4$ perché $2^4 = 16$. Non è difficile constatare che:

$$\log_3 81 = 4; \quad \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2; \quad \log_{25} 5 = \tfrac{1}{2}; \quad \log_5 1 = 0; \quad \log_{\frac{1}{3}} \tfrac{1}{27} = 3$$

Come accadeva per i radicali, non sempre però un logaritmo si può trasformare in un numero razionale, se scrivo $\log_2 3$ non ha un corrispondente razionale e ce lo dobbiamo tenere così, diciamo che $\log_2 3$ è un numero irrazionale, per essere più precisi è un numero reale con $1 < \log_2 3 < 2$.

Vediamo di mettere in evidenza alcune proprietà dei logaritmi con relativa dimostrazione:

$$\boxed{\textbf{P1}: \quad \log_a b = -\log_a \tfrac{1}{b}}$$

Dimostrazione. Sappiamo che $a^{\log_a b} = b$ e $a^{\log_a \dfrac{1}{b}} = \dfrac{1}{b}$.

Ora $a^{\log_a b} = b = \dfrac{1}{\dfrac{1}{b}} = \dfrac{1}{a^{\log_a \dfrac{1}{b}}} = a^{-\log_a \dfrac{1}{b}} \Longrightarrow a^{\log_a b} = a^{-\log_a \dfrac{1}{b}} \Longrightarrow \log_a b = -\log_a \frac{1}{b}$. □

$$\boxed{\textbf{P2}: \quad \log_a b = -\log_{\frac{1}{a}} b}$$

Dimostrazione. Sappiamo che $a^{\log_a b} = b$ e $\frac{1}{a}^{\log_{\frac{1}{a}} b} = b$.

Ora $a^{\log_a b} = b = \frac{1}{a}^{\log_{\frac{1}{a}} b} = a^{-\log_{\frac{1}{a}} b} \Longrightarrow a^{\log_a b} = a^{-\log_{\frac{1}{a}} b} \Longrightarrow \log_a b = -\log_{\frac{1}{a}} b$. □

$$\boxed{\textbf{P3}: \quad \log_a b = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b}}$$

Dimostrazione. Questa proprietà è conseguenza della $P1$ e $P2$:
$\log_a b =$ applichiamo P1 $= -\log_a \frac{1}{b} =$ applichiamo P2 $-\left(-\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b}\right) = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b}$

□

$$\boxed{\textbf{P4}: \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Dimostrazione. Sappiamo che $a^{\log_a b} = b$.

Ora consideriamo $\log_b a$ ed eleviamo ambo i membri della relazione al rigo in alto con $\log_b a$, si ottiene:

$$\left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b a} = b^{\log_b a} \Longrightarrow a^{\log_a b \cdot \log_b a} = a^1 \Longrightarrow \log_a b \cdot \log_b a = 1 \Longrightarrow \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

□

Ora vogliamo mettere l'attenzione su alcune relazioni che spesso si usano e a tal riguardo per dare maggiore risalto vengono denotati come teoremi:

$$\boxed{\textbf{T1}: \quad \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y}$$

Dimostrazione. $a^{\log_a (xy)} = xy$, $a^{\log_a x} = x$ e $a^{\log_a y} = y$

Ovvio che $a^{\log_a (xy)} = xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y} \Longrightarrow \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

□

Osservazione 1. *La scrittura* $\log_a xy$ *non deve creare ambiguità perchè* xy *rappresenta l'argomento del logaritmo e per eccesso di zelo si scrive* $\log_a (xy)$*. La scrittura* $\log_a x \cdot y$ *e ben altra cosa e per non creare molte ambiguità si scrive* $(\log_a x)y$ *o meglio ancora* $y \log_a x$ *per rimarcare che* y *è un fattore e non fa parte dell'argomento del logaritmo. Sono fortemente convinto che le leggi dovrebbero essere scritte dai matematici che cercano di chiarire tutto senza creare delle ambiguità!!!*

Il teorema precedente è stato dimostrato per un argomento composto da due fattori ma vale in generale anche se i fattori sono n, insomma vale la seguente relazione:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \cdots + \log_a x_n$$

$$\boxed{\textbf{T2}: \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Dimostrazione. $a^{\log_a(\frac{x}{y})} = \frac{x}{y}$, $a^{\log_a x} = x$ e $a^{\log_a y} = y$

Ovvio che $a^{\log_a \frac{x}{y}} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y} \Longrightarrow \log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$

□

$$\boxed{\textbf{T3}: \quad \log_a b^n = n \cdot \log_a b \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è conseguenza di del teorema **T1**, infatti

$\log_a b^n = \log_a b + \log_a b + \cdots + \log_a b = n \log_a b$ □

$$\boxed{\textbf{T4}: \quad \log_a \sqrt[q]{b^p} = \frac{p}{q} \log_a b}$$

Il teorema **T3** vale più in generale quando l'esponente è un numero reale $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\textbf{T5}: \quad \log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}}$$

Osservazione 2. *Vogliamo far notare che esistono due basi per i logaritmi che rivestono una certa importanza, al punto tale che si utilizzano delle notazioni specifiche per queste due basi. Quando la base $a = e \approx 2.71828...$ (Numero di Neper), allora in questo caso anziché scrivere* $\log_e b$ *scriveremo* $\ln b$ *(la scrittura ln sta proprio per* logaritmo neperiano*) oppure* $\log b$ *e quindi si omette di scrivere la base e non è una semplice dimenticanza. Un'altra base importante è* $a = 10$ *e in tale situazione anziché scrivere* $\log_{10} b$ *scriveremo Logb (la scrittura Log sta proprio per* logaritmo decimale*).*

In alcune situazioni c'è la necessità di cambiare la la se e a tal proposito dimostriamo l'ultima relazione:

$$\boxed{\textbf{B}: \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Dimostrazione. Sappiamo che $a^{\log_a b} = b$.

Ora se $c > 0 \wedge c \neq 1$, allora $\log_c a^{\log_a b} = \log_c b \Longrightarrow \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b \Longrightarrow \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

□

Esercizio 1.

Calcolare il valore dei seguenti logaritmi:

a) $\log_{\frac{1}{2}} 16 =$ *b)* $\log_7 \frac{1}{49} =$ *c)* $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2} =$ *d)* $\log_9 \frac{1}{81} =$ *e)* $\log_{36} \frac{1}{6} =$

f) $\log_{16} \sqrt[5]{8} =$ *g)* $\log_{81} \sqrt[4]{3} =$ *h)* $\log_{25} \sqrt[5]{625} =$ *i)* $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt[5]{343} =$ *j)* $\log_{\frac{3}{2}} \sqrt[4]{\frac{8}{27}} =$