Nota sui logaritmi

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola 10 Settembre 2024

Definizione 1. *Si dice equazione esponenziale un'equazione nella quale l'incognita compare come esponente di almeno uno dei sui termini. La più stupida equazione esponenziale che vive sul pianeta Terra assume la seguente forma:*

$$a^x = b \text{ con } a > 0 \land a \neq 1 \text{ e } b > 0$$

Sotto le condizioni poste per a e b la soluzione dell'equazione esponenziale in alto è $x = \log_a b$. La scrittura $\log_a b$ si legge logaritmo in base a di b. *Evidentemente teniamo conto che per definizione:*

$$a^{\log_a b} = b \text{ (mettiamo nella testa che questa identità di sinistra la utilizzeremo spesso e ricordiamo che } Papa^{\log_{Papa} Cardinale} = Cardinale\text{)}$$

Insomma, volendo forzare le cose, l'equazione esponenziale $Papa^x = Cardinale$ ha come soluzione $x = \log_{Papa} Cardinale$ e quindi l'identità in alto. Non pubblicizzate queste cose!

Dunque sono espressioni prive di significato le seguenti:

$$\log_{-\frac{1}{2}} -\frac{2}{3}; \quad \log_{-\frac{1}{2}} 4; \quad \log_5 -\frac{3}{4}; \quad \log_0 4; \quad \log_5 0; \quad \log_1 7$$

Vediamo di fare un sillogismo con altri numeri reali non amati dagli studenti, ovvero i radicali! Quando nel passato noi scrivevamo $\sqrt[3]{8}$ si intendeva quel numero che elevato alla terza ci "restituiva" 8. Restando sempre su $\sqrt[3]{8}$, possiamo dire che $\sqrt[3]{8} = 2$ perché $2^3 = 8$, così pure $\sqrt[4]{81} = 3$ perché $3^4 = 81$. Non sempre però un radicale si può trasformare in un numero razionale, se scrivo $\sqrt[3]{2}$ non ha un corrispondente razionale e ce lo dobbiamo tenere così, diciamo che $\sqrt[3]{2}$ è un numero irrazionale.

Quello che abbiamo fatto con il radicali, ora lo facciamo con i **logaritmi**. La scrittura $\log_a b$ si legge *"logaritmo in base a di b"* e rappresenta il numero "da posizionare" come esponente di a per ottenere b.

Vediamo di prendere un pochino di confidenza con i *logaritmi*. Cosa rappresenta $\log_2 16$? A questo punto se ci riflettiamo un attimo diciamo senza esitazioni che $\log_2 16 = 4$ perché $2^4 = 16$. Non è difficile constatare che:

$$\log_3 81 = 4; \quad \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2; \quad \log_{25} 5 = \frac{1}{2}; \quad \log_5 1 = 0; \quad \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3$$

Come accadeva per i radicali, non sempre però un logaritmo si può trasformare in un numero razionale, se scrivo $\log_2 3$ non ha un corrispondente razionale e ce lo dobbiamo tenere così, diciamo che $\log_2 3$ è un numero irrazionale, per essere più precisi è un numero reale con $1 < \log_2 3 < 2$.

Vediamo di mettere in evidenza alcune proprietà dei logaritmi con relativa dimostrazione:

$$\boxed{\textbf{P1}: \quad \log_a b = -\log_a \frac{1}{b}}$$

Dimostrazione. Sappiamo che $a^{\log_a b} = b$ e $a^{\log_a \dfrac{1}{b}} = \dfrac{1}{b}$.

Ora $a^{\log_a b} = b = \dfrac{1}{\dfrac{1}{b}} = \dfrac{1}{a^{\log_a \dfrac{1}{b}}} = a^{-\log_a \dfrac{1}{b}} \Longrightarrow a^{\log_a b} = a^{-\log_a \dfrac{1}{b}} \Longrightarrow \log_a b = -\log_a \frac{1}{b}$. $\square$

$$\boxed{\textbf{P2}: \quad \log_a b = -\log_{\frac{1}{a}} b}$$

Dimostrazione. Sappiamo che $a^{\log_a b} = b$ e $\frac{1}{a}^{\log_{\frac{1}{a}} b} = b$.

Ora $a^{\log_a b} = b = \frac{1}{a}^{\log_{\frac{1}{a}} b} = a^{-\log_{\frac{1}{a}} b} \Longrightarrow a^{\log_a b} = a^{-\log_{\frac{1}{a}} b} \Longrightarrow \log_a b = -\log_{\frac{1}{a}} b$. $\square$

$$\boxed{\textbf{P3}: \quad \log_a b = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b}}$$

Dimostrazione. Questa proprietà è conseguenza della $P1$ e $P2$:
$\log_a b =$ applichiamo P1 $= -\log_a \frac{1}{b} =$ applichiamo P2 $- \left(-\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b}\right) = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b}$

$\square$

$$\boxed{\textbf{P4}: \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Dimostrazione. Sappiamo che $a^{\log_a b} = b$.

Ora consideriamo $\log_b a$ ed eleviamo ambo i membri della relazione al rigo in alto con $\log_b a$, si ottiene:

$$(a^{\log_a b})^{\log_b a} = b^{\log_b a} \Longrightarrow a^{\log_a b \cdot \log_b a} = a^1 \Longrightarrow \log_a b \cdot \log_b a = 1 \Longrightarrow \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

$\square$